

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

62-50
A 65

Ю. Н. АНДРЕЕВ

УПРАВЛЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

537312

Российская республика
научно-техническая
библиотека



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

6ф6.5
А 65
УДК 62-50

Управление конечномерными линейными объектами,
Ю. Н. Андреев. Главная редакция физико-математической
литературы издательства «Наука», 1976, 424 стр.

Книга посвящена важной проблеме теоретической и технической кибернетики — теории синтеза систем управления для линейных объектов с конечномерным пространством состояний.

С помощью аппарата линейных векторных пространств изложены основные результаты теории модального управления и теории оптимальных обратных связей в системах с квадратичным критерием качества. Главным образом рассмотрены детерминированные системы с непрерывным временем. Значительное внимание уделено вычислительным аспектам теории. Наряду с теоретическими положениями книга содержит примеры и задачи, которые подробно иллюстрируют возможности теории при решении конкретных задач аналитического конструирования регуляторов.

Книга адресована инженерам и научным работникам, специализирующимся в области исследования и конструирования систем управления. Она может быть полезна аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.

Илл. 52. Библ. 90 назв.

Юрий Николаевич Андреев

УПРАВЛЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

М., 1976 г., 424 стр. с илл.

Редакторы А. Х. Слободянский, А. А. Моголевский

Техн. редакторы А. П. Колесникова, С. Я. Шкляр

Корректор В. П. Сорокина

Сдано в набор 2/II-1976 г. Подписано к печати 24.VI 1976 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 13,25 Условн. печ. л. 22,26 Уч.-изд. л. 21,72 Тираж 4300 экз. Т-11049 Цена книги 2 р. 06 Заказ № 458

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

А $\frac{30501-090}{053(02)-76}$ 153-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Линейная алгебра	9
§ 1. Кольцо и поле	9
Алгебраическая операция (9). Определение и примеры колец (10). Операций в кольце (11). Поле. Свойства операций в поле (16). Поле вещественных чисел (17). Задачи (18).	
§ 2. Матрицы и действия над ними	18
Обозначения и терминология (18). Сложение и умножение (20). Кольцо квадратных матриц (24). Многочлены от матриц (23). Транспонирование (25). Обратная матрица (26). Клеточные матрицы (27). Матричная запись систем линейных уравнений (29). Задачи (30).	
§ 3. Определитель квадратной матрицы	31
Определение детерминанта (31). Свойства определителей (33). Определитель произведения матриц (38). Вычисление обратной матрицы (40). Алгоритм Гаусса (42). Задачи (44).	
§ 4. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений	45
Линейная зависимость (45). Ранг матрицы (46). Теорема Кронекера — Капелли (49). Фундаментальная система решений (52). О численном решении линейных систем (53). Задачи (55).	
§ 5. Характеристический и минимальный многочлены матрицы	55
Подобные матрицы (55). Характеристический многочлен матрицы (56). Теорема Кэли — Гамильтона (58). Минимальный многочлен (59). Сопровождающая матрица многочлена (60). Задачи (61).	
§ 6. Линейные векторные пространства	61
Линейное пространство и модуль (61). Линейная зависимость (64). Размерность и базис (65). Замена базиса (67). Линейные подпространства (68). Задачи (72).	
§ 7. Линейные преобразования и их матрицы	73
Линейные операторы (73). Матрицы линейных операторов (74). Ранг и дефект линейного оператора (77). Линейные операторы в R^n (79). Обратный оператор (81). Собственные векторы (82). Треугольная форма матрицы (84). Задачи (86).	

§ 8. Евклидовы пространства. Квадратичные формы . . .	87
Скалярное произведение (87). Ортогонализация базиса (89). Сопряженный оператор (90). Самосопряженные операторы (91). Линейные уравнения (95). Матрица Грама (96). Квадратичные формы (98). Задачи (100).	
Г л а в а II. Линейные дифференциальные уравнения . .	101
§ 9. Однородная система. Существование и единственность решения	101
Единственность решения (101). Конечномерность пространства решений (102). Фундаментальная матрица (104). Переходная матрица (105). Теорема о существовании решения (106). Ряд Пеано для переходной матрицы (110). Задачи (111)	
§ 10. Свойства переходной матрицы. Формула Копи . . .	112
Формула Остроградского — Лиувилля (112). Правило композиции (113). Преобразование координат (114). Неоднородное уравнение (115). Сопряженное уравнение (117). Стационарный случай (119). Перечень свойств переходной матрицы (124). Способы построения переходной матрицы (122). Задачи (125).	
§ 11. Линейные системы с периодическими коэффициентами	127
Преобразование Ляпунова. Приводимые системы (128). Теорема Еругина (128). Теорема Ляпунова — Флоке (130). Периодические решения однородной системы (131). Периодические решения неоднородной системы (132). Задачи (137).	
§ 12. Линейные матричные уравнения	139
Матричная формула вариации постоянных (139). Сопряженное уравнение (140). Оценка квадратичного функционала (141). Матричное уравнение $A'V + VA = -W$ (144). Обсуждение (146). Задачи (147).	
§ 13. Численное решение стационарных уравнений	149
Скалярное уравнение (149). Точность аппроксимации (152). Алгоритм решения уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (153). Устойчивость вычислений (154). Неоднородное уравнение (155). Обсуждение (158). Задачи (158).	
Г л а в а III. Устойчивость движения линейных объектов .	160
§ 14. Описание линейных объектов в пространстве состояний	160
Определение линейной системы (160). Понятие состояния (164). Уравнения состояния и передаточная функция (166). Задачи (172).	
§ 15. Устойчивость	174
Устойчивость движения по Ляпунову (174). Устойчивость и переходная матрица (176). Устойчивые стационарные матрицы (177). Критерий Рауса — Гурвица (178). Нестационарные матрицы (181). Устойчивость приводимых систем (182). Равномерная асимптотическая устойчивость (184). Задачи (185).	
§ 16. Второй метод Ляпунова	186
Теорема Ляпунова (186). Геометрический смысл метода (190). Функции Ляпунова нестационарной системы (190). Задачи (195).	

§ 17. Функции Ляпунова и оценка качества переходного процесса	196
Оценка длительности переходного процесса (196). Оценка квадратичного отклонения (197). Обсуждение (197). Численное решение уравнения Ляпунова (198). Задачи (200).	
§ 18. Постановка задач управления	200
Задача программного управления (201). Задача регулирования (201).	
Г л а в а IV. Линейная обратная связь	205
§ 19. Управляемость и достижимость	205
Понятие управляемости (205). Управляемость системы с нулевой матрицей A (207). Критерий управляемости (211). Критерий достижимости (216). Линейные периодические системы (218). Задачи (219).	
§ 20. Стационарные объекты	220
Критерий управляемости (220). Задача финитного управления (224). Эквивалентность управляемости и достижимости (227). Задачи (228).	
§ 21. Понятие обратной связи	229
Закон управления (229). Стационарный управляемый объект (230). Нестационарные объекты (231). Задачи (235).	
§ 22. Канонические представления	235
Замена базиса в пространстве состояний (235). Вычисление матрицы преобразования (237). Каноническое представление системы с одним входом (239). Канонические представления системы с многими входами (243). Задачи (248).	
§ 23. Обратная связь «по состоянию» в стационарных системах	249
Система с одним входом (249). Система с многими входами (253). Задачи (258).	
Г л а в а V. Идентификаторы состояния	259
§ 24. Наблюдаемость и идентифицируемость	260
Основные положения (260). Критерий неидентифицируемости (262). Задача точной оценки состояния (264). Дуальность задач управления и задач оценки состояния (267). Задачи (271).	
§ 25. Асимптотические идентификаторы n -го порядка	271
Простейший идентификатор (272). Асимптотический идентификатор для системы с одним выходом (274). Асимптотический дифференциатор (279). Система с многими выходами (280). Задачи (281).	
§ 26. Идентификаторы Льюенбергера	282
$(n-1)$ -мерный асимптотический идентификатор для системы с одним выходом (282). Алгоритм построения $(n-1)$ -мерного идентификатора (285). Идентификаторы Льюенбергера для системы с многими выходами (286). Матричное уравнение $TA - DT = S$ в теории идентификаторов (291). Еще один способ построения $(n-p)$ -мерного идентификатора (295). Задачи (297).	
Г л а в а VI. Модальное управление	299
§ 27. Конструция регуляторов	300
Применение n -мерных идентификаторов (300). Алгоритм вычисления коэффициентов регулятора для системы с одним	

входом (303). Фильтр Калмана (305). Использование идентификатора Лвенбергера (307). Стабилизация неустойчивого объекта 4-го порядка (310). Задачи (315)	
§ 28. Управление отдельными модами	315
Модальная управляемость (316). Управление одной и двумя модами (317). Итерационное построение модального управления (321). Задачи (323).	
§ 29. Интегральная обратная связь	324
Аддитивная помеха в канале измерения (325). Постоянное возмущение на входе (328). Интегральная обратная связь для многомерного объекта (329). Управление по возмущению (332). Задачи (334).	
§§ 30. Модальное управление распределенной системой . .	335
Аппроксимация распределенной системы с помощью конечного числа мод (335). Стабилизация неустойчивой распределенной системы (337). Задачи (341).	
31. Следящая система	341
Постановка задачи (342). Точная компенсация помехи (344). Слежение за командным сигналом (345). Физически реализуемая следящая система (348). Задача (357).	
Г л а в а VII. Квадратичный критерий качества	358
§ 32. Минимизация в евклидовых пространствах	360
Минимальная длина вектора, принадлежащего заданной гиперплоскости (360). Минимальная норма решения линейной системы (361). Минимизация квадратичной формы на решениях линейной системы (363). Задачи (364).	
§ 33. Задачи со свободным конечным состоянием системы .	365
Уравнение Риккати (365). Задача о регуляторе нулевого состояния (367). Явный вид решения уравнения Риккати (372). Преобразование координат (373). Задача о регуляторе выхода (374). Задачи (376).	
§ 34. Терминальное управление	378
Минимум нормы терминального управления (378). Общий случай терминальной задачи (382). Оптимальная следящая система (385). Задачи (387).	
§ 35. Стационарные системы	389
Алгебраическое уравнение Риккати (389). Явный вид решения стационарного уравнения Риккати (393). Единственность оптимального управления (394). Стационарные регуляторы (395). Задачи (398).	
§ 36. О решении уравнения Риккати	400
Локальные условия существования решения уравнений Риккати (400). Канонические уравнения (403). Существование решения на полубесконечном интервале (406). Численное интегрирование уравнения Риккати на конечном временном интервале (408). Итерационное решение алгебраического уравнения Риккати (409). Задачи (410).	
Послесловие	413
Указания на литературные источники	417
Литература	418
Предметный указатель	422

ПРЕДИСЛОВИЕ

Началом настоящей работы послужили лекции по теории управления, прочитанные автором для сотрудников лаборатории автоматизации института «Теплопроект» в 1972—73 гг. Значительное влияние как на подбор материала, так и на характер его изложения оказали работы Р. Калмана и книги [52, 55, 81].

Схема изложения теории управления линейными объектами принципиально отличается от принятой в традиционных курсах.

Главное внимание уделено той части линейной теории, в которой используются только конечномерные пространства состояний, а в качестве управляющих воздействий выбираются непрерывные функции времени. Автор стремился построить изложение основных фактов, используя только тот минимум математических понятий, который обусловлен решаемыми прикладными задачами. По существу вся теория сводится к подробному разъяснению понятий конечномерной линейной алгебры и таких понятий, как состояние, идентификатор состояния, обратная связь по состоянию. Доказательства основных результатов теории предельно просты. Как правило, они сводятся к выбору соответствующего базиса в конечномерном пространстве состояний. Вместе с тем в рамках этого подхода получено решение задач, имеющих большое практическое значение. К ним относится задача конструирования динамических обратных связей, обеспечивающих заданное размещение полюсов замкнутого объекта на комплексной плоскости. Возможность решения этой задачи для стационарного линейного объекта обеспечивается наличием у него свойств управляемости и идентифицируемости и не зависит от числа входов и выходов, а также от сложности его внутренней структуры. Более того, вычислить структуру и все коэффициенты такого регулятора по заданным динамическим свойствам объекта — подчас более простая задача с точки зрения объема вычислений, чем задача исследования динамических свойств разомкнутого объекта. Безусловно, такое «простое» решение задачи синтеза связано с опреде-

ленной идеализацией реальных объектов. Тем не менее эти результаты имеют очень важное значение при решении задач конструирования конкретных систем управления.

Значительное внимание в книге уделено вычислительным методам. Приведены эффективные алгоритмы численного решения основных уравнений линейной теории: алгоритм вычисления матричной экспоненты, алгоритм решения матричного уравнения Ляпунова и матричного уравнения Риккати, алгоритмы аналитического конструирования модальных и оптимальных регуляторов.

В работе отсутствуют обычные темы линейной теории регулирования: частотные методы, метод корневого годографа, свойства преобразований Лапласа, передаточные функции и их связь с частотными характеристиками и т. п. Это, конечно, не означает, что автор считает эти методы устаревшими или малоэффективными. Имеется целый ряд важнейших проблем теории регулирования, для решения которых наиболее эффективны именно эти методы.

О содержании книги можно судить по подробному оглавлению.

Приведенные в тексте задачи можно разбить на три категории: 1) простые упражнения, решение которых не должно вызывать затруднений, если понят основной текст параграфа; 2) задачи, путь решения которых ясен из основного текста, но для получения ответа требуется провести подчас не совсем короткие и не совсем простые выкладки (для решения некоторых из таких задач требуется составить программу для ЦВМ); 3) задачи типа дополнительных теорем, доказательство которых может потребовать привлечения дополнительных сведений. В виде таких задач иногда вводятся новые темы, которые в последующих параграфах подробно разбираются в основном тексте.

Книга ориентирована главным образом на специалистов по автоматическому регулированию и студентов соответствующих специальностей, знакомых с классическими методами теории регулирования. Однако изложение доступно для начального ознакомления с предметом.

Нумерация формул, теорем и рисунков принята своя для каждого параграфа.

Автор выражает глубокую благодарность М. А. Айзерману за ряд ценных критических замечаний.

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Основная цель, которой подчинено содержание этой главы, ввести и подробно разъяснить понятия и факты линейной алгебры, используемые в теории конечномерных линейных управляемых систем.

Здесь изложены основы алгебры матриц, теории линейных уравнений, основные факты относительно линейных операторов, действующих в линейных векторных пространствах, элементы теории евклидовых пространств и необходимые в дальнейшем сведения о квадратичных формах.

§ 1. Кольцо и поле

Основным объектом, с которым нам предстоит иметь дело, будет *матрица*. Так называют прямоугольную таблицу, составленную из некоторых элементов. Эти элементы чаще всего обычные числа. Нам, однако, встретятся матрицы, элементами которых будут непрерывные функции, многочлены, матрицы. Будем обозначать множество чисел или объектов другой природы, из которого мы будем черпать элементы матриц, буквой K . Прежде чем приступить к изучению свойств матриц необходимо описать алгебраические свойства множества K .

Алгебраическая операция. Пусть задано множество K объектов произвольной природы $a, b, c, \dots$, которые мы будем называть элементами множества K . Мы скажем, что в множестве K определена *алгебраическая операция*, если указан закон, по которому любой паре элементов a, b из этого множества, взятым в определенном порядке, ставится в соответствие единственный элемент c того же множества.

Алгебраическая операция может и не обладать свойством коммутативности: если паре элементов a, b ставится в соответствие элемент c , то паре элементов b, a может оказаться поставленным в соответствие другой элемент d . Следует обратить внимание на то, что в определении алгебраической операции содержится требование *однозначности и выполнимости* операции для любых двух элементов множества K .

Примерами алгебраических операций служат операции сложения и умножения на множестве целых чисел. Операция сложения, определенная на множестве четных чисел, не является алгебраической операцией, так как результат этой операции не принадлежит исходному множеству K , например, $1 + 1 = 2$ — четное число. Не будет алгебраической операцией и операция деления на множестве вещественных чисел, так как деление на нуль невозможно.

Определение и примеры колец. Мы будем рассматривать множества с двумя алгебраическими операциями, которые мы будем называть сложением и умножением. Вообще говоря, эти операции могут и не быть сложением и умножением в обычном смысле. Важно, чтобы обе они удовлетворяли определению алгебраической операции.

О п р е д е л е н и е 1. Множество K называется *кольцом*, если в нем определены две алгебраические операции — сложение и умножение, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1. Сложение коммутативно: $a + b = b + a$.
2. Сложение ассоциативно: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Если a, b — элементы K , то уравнение $a + x = b$ разрешимо в K .
4. Умножение ассоциативно: $(ab)c = a(bc)$.
5. Операции сложения и умножения связаны законом дистрибутивности: $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$. $\odot$ *)

Обычно такое кольцо называют *ассоциативным кольцом*. Если умножение в кольце коммутативно: $ab = ba$ для любых a и b из K , то кольцо называется *коммутатив-*

*) Знак « $\odot$ » ставится в конце определения, доказательства теоремы и т. д.

лемма. В коммутативном кольце второе из равенств аксиомы 5 является следствием первого.

Укажем примеры колец.

1. Простой пример числового кольца — множество **целых** чисел с обычными операциями сложения и умножения. Очевидно, это коммутативное кольцо. Множество **целых** положительных чисел не будет кольцом, так как не выполняется аксиома 3 определения кольца.

2. Рассмотрим множество **К** функций действительного переменного t , непрерывных на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$. Сумма и произведение двух функций из **К** будут также непрерывными функциями. Следовательно, сложение и умножение непрерывных функций будут алгебраическими операциями, определенными в **К**. Поскольку для этих операций выполняются условия 1—5, множество **К** образует кольцо, притом коммутативное, так как умножение функций подчиняется коммутативному закону.

3. Все многочлены от одного переменного с произвольными числовыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения многочленов образуют коммутативное кольцо.

4. Ассоциативное, но некоммутативное, кольцо образуют все квадратные матрицы одного порядка с произвольными числовыми элементами (о сложении и умножении матриц см. § 2).

5. Все четные числа образуют кольцо относительно операций сложения и умножения.

Операции в кольце. Рассмотрим теперь простейшие свойства алгебраических операций в кольце. Начнем со следствий, вытекающих из законов ассоциативности. Из этих законов непосредственно следует, что произведение и сумма для любого конечного числа элементов кольца определяются однозначно и не зависят от первоначального распределения скобок. Например, можно говорить о произведении четырех элементов кольца $abcd$, так как все пять возможных способов вычисления этого произведения

$$((ab) c) d, (a (bc)) d, a ((bc) d), a (b (cd)), (ab) (cd)$$

дают один и тот же результат. Действительно, каждое следующее произведение получается из предшествующего непосредственным применением закона ассоциативности 4. То же, очевидно, справедливо и для операции сложения.

По индукции легко показать, что это свойство справедливо для любых n элементов кольца, т. е. справедливо

Предложение 1. Во всяком произведении n элементов кольца K : $a_1 a_2 \dots a_n$ и во всякой сумме n элементов кольца K : $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ скобки можно составлять произвольно, сохраняя порядок следования элементов. $\odot$

Так как сложение подчиняется коммутативному закону, то порядок следования слагаемых в сумме двух или нескольких элементов не является существенным. Что касается произведения двух или нескольких элементов, то оно уже зависит от порядка следования сомножителей, так как умножение, вообще говоря, не подчиняется коммутативному закону.

Свойство ассоциативности умножения позволяет ввести следующее понятие целой положительной степени элемента кольца.

Определение 2. n -й степенью (n — целое положительное число) элемента a назовем произведение n одинаковых сомножителей $aa \dots a$ и будем обозначать ее через a^n . Сам элемент a будем рассматривать как a^1 . $\odot$

Нетрудно проверить, что для целых положительных степеней элементов кольца справедливы обычные правила действий со степенями:

$$a^m a^n = a^n a^m = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

а если кольцо коммутативно, то выполняется правило

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Докажем для примера последнее равенство

$$a^n b^n = \underbrace{(a a \dots a)}_{n \text{ раз}} \underbrace{(b b \dots b)}_{n \text{ раз}},$$

в силу коммутативности можно изменить порядок сомножителей и получить

$$\underbrace{(ab) \cdot (ab) \dots (ab)}_{n \text{ раз}} = (ab)^n.$$

Рассмотрим теперь следствия аксиомы 3. Пусть b — некоторый элемент кольца. По условию 3 существует элемент c такой, что $b + c = b$. Назовем элемент c кольца K нулевым элементом или нулем. Покажем, что нулевой

элемент единствен. Пусть c_1 — тоже нуль. Тогда $c_1 + c = c_1$ и одновременно $c + c_1 = c$. Отсюда видно, что $c_1 = c$. Нуль кольца K обозначим через 0. Понятно, что нулевой элемент кольца не обязательно совпадает с числом 0. Для кольца непрерывных на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ функций, например, нулевой элемент кольца — функция, тождественно равная нулю при $t_0 \leq t \leq t_1$. В кольце квадратных матриц нулевым элементом будет матрица, все элементы которой равны нулю. Мы доказали следующее

Предложение 2. *Всякое кольцо K обладает единственным элементом, называемым нулевым элементом кольца, сумма которого с любым элементом a этого кольца совпадает с a : $a + 0 = a$ для всех a из K .* ○

Рассмотрим уравнение $a + x = 0$, которое согласно аксиоме 3 имеет решение. Покажем, что это решение единственно. Действительно, пусть x_1 и x_2 — два корня этого уравнения, т. е. $a + x_1 = 0$ и $a + x_2 = 0$. Прибавим к обеим частям первого равенства элемент x_2 , тогда $(a + x_1) + x_2 = x_2$, но, с другой стороны, $(a + x_1) + x_2 = (a + x_2) + x_1 = 0 + x_1 = x_1$. Единственность доказана. Единственное решение уравнения $a + x = 0$ называют элементом, противоположным a , и обозначают $(-a)$. Мы доказали

Предложение 3. *Во всяком кольце для любого элемента a существует однозначно определенный противоположный элемент $(-a)$, удовлетворяющий равенству*

$$a + (-a) = 0. \quad \odot$$

После определения нуля и противоположного элемента нетрудно показать, как решается уравнение $a + x = b$. Если к обеим частям прибавим $(-a)$, то в результате получим $(-a) + a + x = b + (-a)$ или, так как $(-a) + a = 0$, $x = b + (-a)$. Выражение $b + (-a)$ принято обозначать $(b - a)$ и называть разностью элементов b и a . Таким образом, из аксиомы 3 следует, что в кольце всегда однозначно выполнимо вычитание. Очевидно, что $a - a = 0$, $0 - a = -a$.

Если в кольце K вычитание всегда возможно, то относительно деления этого сказать нельзя, так как мы нигде не требовали, чтобы уравнения $ax = b$ и $xa = b$ были разрешимы.

Кроме нуля, в кольце K может существовать (но может и не существовать) элемент, известный под названием единицы кольца.

О п р е д е л е н и е 3. *Единицей кольца K называется такой элемент $e \neq 0$, для которого $ae = ea = a$ для любого элемента a из K .* $\odot$

Нетрудно показать, что если в кольце K единица существует, то она единственна. Пусть, например, есть две единицы в кольце K : e_1 и e . Тогда $ee_1 = e_1$ и одновременно $e_1e = ee_1 = e$. Значит, $e = e_1$. В кольце с единицей можно ввести понятие нулевой степени элемента, положив по определению $a^0 = e$ (0 — число). В кольце с единицей правила действия со степенями будут, таким образом, справедливы при любых целых неотрицательных показателях n .

Примеры колец с единицей: 1) кольцо целых положительных чисел, 2) кольцо непрерывных функций. Единичным элементом является в этом кольце функция $f(t) \equiv 1$ при $t_0 \leq t \leq t_1$.

Кольцо четных целых чисел является примером кольца, которое не содержит единицы.

Обратимся к аксиоме 5 — закону дистрибутивности. Это единственная аксиома в определении кольца, которая связывает операции сложения и умножения. В формулировке этой аксиомы участвует сумма двух слагаемых. Это свойство, однако, распространяется по индукции на любое конечное число членов $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b = a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ при любом n . Более того, по индукции легко доказать общее правило перемножения двух сумм

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_k) (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \\ = a_1b_1 + a_2b_1 + \dots + a_kb_1 + a_1b_2 + \dots + a_kb_n. \end{aligned}$$

Порядок следования слагаемых произволен, но если кольцо не коммутативно, мы не можем переставлять сомножители в произведении a_1b_1 .

Во всяком кольце распределительный (дистрибутивный) закон остается в силе и для операции вычитания:

$$a(b - c) = ab - ac, \quad (b - c)a = ba - ca$$

для любых a, b, c из кольца.

Получим, например, первое равенство. По определению разности имеем $c + (b - c) = b$. Умножим обе части этого равенства на a , тогда $a(c + (b - c)) = ab = ac + a(b - c)$. Из последнего равенства мы видим, что $a(b - c) = ab - ac$.

Пользуясь дистрибутивностью операции вычитания, покажем, что произведение двух элементов кольца равно нулю, если равен нулю один из элементов. В самом деле, $a \cdot 0 = a(b - b) = ab - ab = 0$, $0 \cdot a = (b - b)a = ba - ba = 0$.

Обратное, однако, не всегда верно. Если произведение двух элементов равно нулю, то сомножители могут и не равняться нулю: $ab = 0$ при $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Такие элементы a, b кольца называются его делителями нуля. Например, в кольце непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций делителями нуля будут функции

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq 0,5, \\ t & \text{при } 0,5 < t \leq 1, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t < 0,5, \\ 0 & \text{при } 0,5 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_1(t) \neq 0$ и $f_2(t) \neq 0$ (0 здесь не число нуль, а нулевой элемент кольца — функция, тождественно равная нулю при $0 \leq t \leq 1$) и в то же время $f_1(t)f_2(t) = 0$.

Свойство дистрибутивности вычитания позволяет проверить справедливость следующих правил знаков при умножении:

$$(-a)b = -ab, \quad a(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab.$$

Действительно, проверим, например, второе правило

$$a(-b) = a(0 - b) = a \cdot 0 - ab = -ab.$$

Таким образом, алгебраические операции в произвольном кольце обладают многими привычными свойствами операций над числами.

Есть, однако, и существенные отличия операций в произвольном кольце и в числовых системах. Мы указали на следующие, наиболее важные: 1) в произвольном ассоциативном кольце умножение может быть некоммутативно,

поэтому, например, формула $a^n b^n = (ab)^n$ не верна, вообще говоря, в таком кольце, 2) может не существовать элемента, выполняющего функцию единицы кольца, 3) операция деления может быть вообще не выполняема, 4) произведение ненулевых элементов (делителей нуля) может равняться нулевому элементу кольца. Заметим еще, что мы определили степень элемента кольца только для целых положительных чисел.

Поле. Свойства операций в поле. Обратимся к одному особому классу колец.

О п р е д е л е н и е 4. Коммутативное кольцо, в котором уравнение $ax = b$ разрешимо при любых $a \neq 0$ (т. е. выполнимо деление на любой элемент, кроме ненулевого), называется *полем*. $\odot$

Если в кольце единица могла и не существовать, то в поле она всегда существует и единственна. Доказывается это в точности так же, как мы доказывали существование и единственность нулевого элемента в кольце. Дословное повторение доказательств возможно потому, что соотношения $a + c = a$ и $ae = a$ отличаются только знаком операции, и изменения в доказательствах будут состоять лишь в замене терминов: сложения — умножением, нулевого элемента — единичным элементом, противоположно-го элемента — обратным элементом.

Таким образом, для поля справедливо следующее

Предложение 4. 1. В поле всегда существует и единствен единичный элемент такой, что $ae = ea = a$ для любого a из поля.

2. Для каждого ненулевого элемента поля существует и единствен элемент a^{-1} такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, называемый элементом, обратным относительно a . При этом $(a^{-1})^{-1} = a$.

3. Для любого элемента a , отличного от нуля, и любого целого положительного числа n имеет место равенство $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$. Эти равные между собой элементы обозначаются через a^{-n} . $\odot$

В поле справедливы любые обычные операции с дробями. Так, решение уравнения $ax = b$ ($a \neq 0$) можно записать в виде $(a^{-1})ax = x = a^{-1}b = b/a$. Действия с символом b/a ничем не отличаются от обычных операций с дробями, а именно: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ тогда и только тогда, когда $bc = ad$

$$(a \neq 0, c \neq 0), \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \frac{bc \pm ad}{ac} \text{ (правило сложения) } (a \neq 0, c \neq 0), \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac} \text{ (правило умножения) } (a \neq 0, c \neq 0), \frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{bc}{ad} \text{ (правило деления) } (a \neq 0, c \neq 0, d \neq 0).$$

Правила действий со степенями

$$a^m a^n = a^n a^m = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

справедливы для всех целых m и n .

В отличие от кольца поле не содержит делителей нуля. Если произведение элементов поля ab равно нулю, то по меньшей мере один из сомножителей a или b равен нулю. Действительно, пусть $a \neq 0$, тогда, умножив обе части равенства $ab = 0$ на a^{-1} , получим $b = 0$.

П р и м е р 1. Полем является совокупность рациональных чисел, совокупность вещественных чисел (это поле обозначается буквой R), совокупность комплексных чисел (обозначается буквой C).

2. Построим пример конечного поля из двух элементов a_1, a_2 , определив операции сложения и умножения следующим образом:

$$\text{сложение } a_1 + a_1 = a_2, \quad a_1 + a_2 = a_1, \quad a_2 + a_2 = a_2;$$

$$\text{умножение } a_1 a_1 = a_1, \quad a_1 a_2 = a_2, \quad a_2 a_2 = a_2.$$

Тогда, очевидно, a_1 является единицей поля, а a_2 — его нулем, и легко проверить, что все аксиомы выполняются.

3. Полем будет совокупность дробно-рациональных функций с действительными коэффициентами [29]

Поле вещественных чисел. Помимо того, что множество вещественных чисел является полем, оно обладает еще рядом замечательных свойств, которые для поля, вообще говоря, не обязательны. Чтобы аксиоматически описать множество вещественных чисел, необходимо заметить, что это — поле, элементы которого удовлетворяют следующим аксиомам.

Аксиома упорядоченности. Любые два вещественных числа a и b удовлетворяют одному и только одному из трех соотношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$. При этом, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность свойства упорядоченности).

637312

БИБЛИОТЕКА
ТЕХНИЧЕСКАЯ

Аксиома Архимеда. Каково бы ни было число a , существует целое число n такое, что $n > a$.

Аксиома непрерывности. Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы. $\odot$

Напомним, что система числовых отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Обратите внимание, что многие факты линейной алгебры справедливы не только для поля вещественных чисел, но и вообще для любых полей, или даже для любых (как правило, коммутативных) колец.

Задачи. 1. Составляют ли кольцо числа вида $a + b\sqrt{2}$ (a и b — целые)? Является ли это множество полем?

2. Содержит ли делители нуля кольцо многочленов степени не выше n ?

3. Является ли множество целых чисел, кратных данному числу $n > 0$, с обычными операциями сложения и умножения кольцом? полем?

4. Докажите, что множество пар целых чисел (m, n) с операциями, заданными равенствами $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$, $(m_1, n_1) (m_2, n_2) = (m_1 m_2, n_1 n_2)$, является кольцом. Укажите делители нуля в этом кольце.

5. Образуют ли кольцо всевозможные полиномы вида $a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx$, где a_m — действительные числа?

6. Покажите, что в кольце с единицей коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца.

7. Докажите, что коммутативное кольцо с конечным числом элементов, не содержащее делителей нуля, в котором имеется более одного элемента, является полем.

§ 2. Матрицы и действия над ними

Обозначения и терминология. Система элементов множества K , расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется *матрицей* над K . В качестве множества K мы будем рассматривать некоторое кольцо. Элементы множества K мы будем называть *числами* и обозначать либо малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, либо малыми латинскими буквами

$a, b, c, \dots$ Обычная запись прямоугольной матрицы:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix},$$

где α_{ij} — обозначение элементов из K . Иногда используют сокращенную запись $\|\alpha_{ij}\|$, $\|\alpha_{ij}\|_{mn}$, $[\alpha_{ij}]$, $[\alpha_{ij}]_{mn}$. Мы будем использовать для записи матриц **квадратные скобки**.

При обозначении элемента матрицы α_{ij} *первый индекс* всегда будет обозначать *номер строки*, в которой расположен элемент, а *второй индекс* будет соответствовать *номеру столбца*.

Если число строк равно числу столбцов матрицы $n = n$, то матрица называется **квадратной**, а число n — **ее порядком**.

Матрицу, состоящую из одного столбца, называют **просто столбцом** или **вектором-столбцом**, а матрицу, состоящую из одной строки, — **строкой** или **вектором-строкой**. Число элементов в строке называют **длиной строки**.

Матрицы мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$ Для обозначения столбцов и строк будем использовать малые латинские буквы $a, b, \dots, x, \dots$

Две матрицы называют **равными**, если у них равны соответственно числа строк и столбцов и если равны все элементы, стоящие на соответственных местах этих матриц.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей** и обозначается O . Если желают указать число строк и столбцов в нулевой матрице, то пишут O_{mn} , $[O]_{mn}$.

Квадратную матрицу, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю (элементы, расположенные на главной диагонали, имеют одинаковые

индексы $i = j$), называют *диагональной*:

$$\text{diag} [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Сложение и умножение. Для матриц с элементами из кольца, имеющих одинаковые размеры, естественным образом определяют сложение. Суммой таких матриц A и B называют матрицу C , элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Из определения суммы матриц непосредственно следует, что

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Кроме того, поскольку элементы матриц являются элементами кольца, то имеет место свойство, аналогичное свойству 3 определения кольца: каждое матричное уравнение $A + X = B$ имеет единственное решение.

Свойства операции сложения естественным образом распространяются на случай любого числа слагаемых.

Определение 1. Пусть заданы две матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй. Тогда матрица C , составленная из элементов

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

называется *произведением A на B* и обозначается AB . $\odot$

Согласно этому определению элемент матрицы произведения C , стоящий в i -й строке и в j -м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B . Например, при умножении матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

элемент c_{13} , стоящий в первой строке и в третьем столбце матрицы результата, будет равен сумме произведений соответствующих элементов 1-й строки матрицы A и 3-го

столбца матрицы B :

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}.$$

Умножение двух квадратных матриц одного порядка всегда выполнимо. Умножение же прямоугольных матриц выполнимо только тогда, когда число элементов в строке первой матрицы равно числу элементов в столбце второй матрицы.

Умножение матриц обладает свойством ассоциативности:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Это свойство доказывается непосредственной проверкой результата операций справа и слева для произвольных матриц A, B, C размеров $(n \times m)$, $(m \times k)$, $(k \times l)$ соответственно. Ассоциативность матричного умножения имеет место, таким образом, для любых, не обязательно квадратных матриц.

Из свойства ассоциативности следует, что произведение матриц $A, B, C, \dots, D$, записанных в определенном порядке, не зависит от способа расстановки скобок.

Непосредственной проверкой доказывается и свойство дистрибутивности матричных операций сложения и умножения

$$(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB.$$

Кольцо квадратных матриц. Если рассматривать квадратные матрицы одного порядка с элементами из некоторого кольца, то введенные операции сложения и умножения матриц являются такими алгебраическими операциями, для которых выполнены все, как следует из рассмотренных выше свойств этих операций, аксиомы кольца. Таким образом, справедливо

Предложение 1. Совокупность квадратных матриц одного порядка над произвольным ассоциативным кольцом является ассоциативным кольцом относительно матричных операций сложения и умножения. $\odot$

Совокупность прямоугольных матриц при $n \neq m$ не может быть кольцом (почему?) относительно введенных операций сложения и умножения.

В дальнейшем мы будем предполагать, что кольцо K , которому принадлежат элементы матрицы (мы условились

называть эти элементы числами), имеет единицу. Тогда кольцо квадратных матриц также обладает единицей. Единица кольца матриц совпадает с матрицей, все диагональные элементы которой равны 1 *), а остальные — нулю. Эту матрицу мы будем называть *единичной* и обозначать буквой

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением устанавливаются равенства

$$AE = EA = A$$

для любой квадратной матрицы A .

Нулем этого кольца является нулевая матрица.

Рассмотрим некоторые свойства кольца квадратных матриц:

1. Кольцо матриц некоммукативно, так как для квадратных матриц операция умножения не обладает свойством коммутативности. Например,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

2. Как и в любом другом кольце, вводится понятие n -й степени квадратной матрицы (n — целое неотрицательное число). При этом $A^0 = E$, $A^1 = A$. Справедливы обычные правила действий со степенями:

$$A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn}.$$

Таким образом, все натуральные степени одной и той же матрицы перестановочны между собой. Если матрицы A и B перестановочны, то для любого натурального n имеем

$$(AB)^n = A^n B^n.$$

Справедлива и более общая формула: если матрицы A и B перестановочны, то любые их натуральные степени так-

*) Так в дальнейшем будет обозначен единичный элемент исходного кольца K .

же перестановочны:

$$A^m B^n = B^n A^m$$

для любых натуральных m и n .

Доказательство этих формул было проведено при изучении свойств кольца в § 1.

3. Кольцо квадратных матриц имеет делители нуля. Например,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы слева являются делителями нуля в кольце квадратных матриц второго порядка.

4. Как и в обычном кольце, свойства ассоциативности сложения и умножения и закон дистрибутивности справедливы для любого числа элементов.

5. Определена и единственна операция вычитания и справедливы все обычные правила знаков.

Многочлены от матриц. Введем операцию *умножения матриц на число*. (Будьте внимательны! Числом мы называем элемент исходного кольца K .)

О п р е д е л е н и е 2. Чтобы умножить число a на матрицу A , или матрицу A на число a , нужно умножить на a все элементы матрицы A . Например,

$$a \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ aa_{21} & aa_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} a_{11}a & a_{12}a \\ a_{21}a & a_{22}a \end{bmatrix}.$$

Если кольцо, из которого берутся элементы матрицы, коммутативно, то справедливо равенство $aA = Aa$ для любой матрицы A и любого a из K . В случае некоммутативности кольца (если, например, элементы матрицы сами являются матрицами) может оказаться, что $aA \neq Aa$. Обратите внимание, что операция умножения матрицы на число и операция умножения прямоугольных матриц не подходят под определение алгебраической операции (по-чему?).

Ясно, что для каждой матрицы A над кольцом K и всяких элементов a, b того же кольца K имеют место соотношения:

1. $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$;
2. $0A = A0 = 0_{mn}$, $a0_{mn} = 0_{mn}a = 0_{mn}$;
3. $a(bA) = (ab)A$, $(Aa)b = A(ab)$;

$$4. (a + b) A = aA + bA, \quad A(a + b) = Aa + Ab;$$

$$5. (-1) A = -A, \quad (-a) A = -aA,$$

которые непосредственно следуют из аксиом кольца.

Определение умножения матриц на числа вместе с определением натуральной степени квадратной матрицы позволяют ввести важное понятие многочлена от квадратной матрицы. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

— какой-нибудь многочлен от буквы λ , коэффициенты которого $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ принадлежат кольцу $\mathbf{K}$. Если A — квадратная матрица над $\mathbf{K}$, то выражение

$$\alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = \varphi(A)$$

называется *значением* многочлена $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = A$, или просто *многочленом от матрицы* A .

В силу законов ассоциативности и дистрибутивности произведение двух многочленов $\varphi(A)$ и $\psi(A)$ одной и той же матрицы всегда определено. Однако, чтобы выполнялись обычные правила действий с многочленами, необходимо предположить, что кольцо $\mathbf{K}$ коммутативно. Для ассоциативного кольца, например, произведение двух многочленов от матрицы

$$\varphi(A) = \alpha_1 A + \alpha_0 E \quad \text{и} \quad \psi(A) = \beta_1 A + \beta_0 E$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(A) \psi(A) &= (\alpha_1 A + \alpha_0 E) (\beta_1 A + \beta_0 E) = \\ &= \alpha_1 A \beta_1 A + \alpha_1 A \beta_0 E + \alpha_0 E \beta_1 A + \alpha_0 E \beta_0 E = \\ &= \alpha_1 A \beta_1 A + \alpha_1 A \beta_0 + \alpha_0 \beta_1 A + \alpha_0 \beta_0 E; \end{aligned}$$

последнее преобразование можно выполнить в силу того, что единица в кольце коммутирует с любым элементом кольца.

Если же предположить, что кольцо $\mathbf{K}$ коммутативно, то сложение и умножение многочленов от матриц выполняются по правилам, справедливым для обычных многочленов. Например,

$$\begin{aligned} \varphi(A) + \psi(A) &= (\alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n) + \\ &\quad + (\beta_0 E + \beta_1 A + \dots + \beta_n A^n) = \\ &= (\alpha_0 + \beta_0) E + (\alpha_1 + \beta_1) A + \dots + (\alpha_n + \beta_n) A^n, \\ \varphi(A) \cdot \psi(A) &= \alpha_0 \beta_0 E + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) A + \dots + \alpha_n \beta_n A^{2n}. \end{aligned}$$

В случае коммутативного кольца K легко проверить
Предложение 2. *Многочлены от одной и той же матрицы перестановочны друг с другом:*

$$\varphi(A) \psi(A) = \psi(A) \varphi(A).$$

Транспонирование. Пусть дана прямоугольная матрица с элементами из коммутативного кольца. Матрица, которая получается из A заменой строк столбцами, называется *транспонированной* по отношению к A и обозначается A' . Если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{то} \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем штрихом всегда будем обозначать переход к транспонированной матрице. В частности, если, например, x — матрица-столбец, то через x' будем обозначать матрицу-строку. Это обозначение мы часто будем использовать для записи компонент вектор-столбца в строку, т. е. $x' = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, где x — столбец.

Для произвольных матриц A, B с элементами из коммутативного кольца имеют место следующие правила транспонирования:

$$\begin{aligned} (aA + bB)' &= aA' + bB', \\ (AB)' &= B'A', \end{aligned}$$

где a, b — какие-либо числа. Докажем второе равенство. Элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце матрицы $(AB)'$, равен элементу, стоящему в j -й строке и в i -м столбце матрицы AB (по определению транспонирования), т. е. равен

$$\alpha_{j1}\beta_{1i} + \alpha_{j2}\beta_{2i} + \dots + \alpha_{jm}\beta_{mi},$$

где α_{ij}, β_{ij} — элементы матриц A, B . Но это выражение совпадает с суммой произведений элементов i -й строки матрицы B' на соответственные элементы j -го столбца матрицы A' , поэтому $(AB)' = B'A'$.

Доказанное свойство по индукции распространяется на любое число сомножителей. В случае произведения трех матриц, например, имеем

$$(ABC)' = (A(BC))' = (BC)'A' = C'B'A'.$$

Еще раз подчеркнем, что эти правила транспонирования справедливы для произвольных (не обязательно квадратных) матриц.

Предложение 3. Матрица, полученная при транспонировании произведения матриц, равна произведению транспонированных сомножителей, расположенных в противоположном порядке. $\odot$

Если матрица A равна A' , то она называется симметрической матрицей.

Для любой прямоугольной матрицы A очевидно определено умножение AA' . Более того, матрица AA' является квадратной симметрической матрицей. Действительно, $(A')' = A$ по определению транспонированной матрицы, и значит,

$$(AA')' = (A')'A' = AA'.$$

Обратная матрица. Квадратная матрица A над кольцом K называется *обратимой*, если существует квадратная матрица A^{-1} , для которой выполнены соотношения

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матрица A^{-1} в этом случае называется *обратной* к A или *обращением* матрицы A .

Если обратная матрица существует, то она единственна. Действительно, пусть имеются две обратные матрицы A^{-1} и A_1^{-1} , тогда $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ и $AA_1^{-1} = A_1^{-1}A = E$. Умножая, например, первое равенство слева на A_1^{-1} , получим

$$A_1^{-1}AA^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1},$$

но так как $A_1^{-1}A = E$, имеем $A^{-1} = A_1^{-1}$. Непосредственно из определения следует, что $(A^{-1})^{-1} = A$.

Если квадратные матрицы A, B с элементами из коммутативного кольца обратимы, то их произведение также обратимо и справедливо равенство

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (1)$$

которое легко проверяется непосредственно. Так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$, то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Формула (1) напоминает формулу для транспонирования произведения матриц. По индукции это свойст-

во легко распространяется на любое число сомножителей.
Справедливо

Предложение 4. *Обращение произведения матриц равно произведению обращений сомножителей, расположенных в противоположном порядке.* $\odot$

Для каждой обратимой матрицы A наряду с натуральными степенями $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, ... можно рассматривать целые отрицательные степени, считая по определению

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1}, \quad A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}, \dots$$

Из этого определения и определения обратной матрицы следует, что правила действий со степенями

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

справедливы для любой обратимой матрицы при любых целых (не обязательно положительных) числах m, n .

Рассмотрим теперь связь операций транспонирования и обращения. По правилу транспонирования произведения двух матриц имеем

$$(AA^{-1})' = (A^{-1}A)' = (A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = E.$$

Отсюда следует, что

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

Таким образом, при транспонировании обратимой матрицы получается снова обратимая матрица.

Клеточные матрицы. Разобьем какую-нибудь матрицу A системой вертикальных и горизонтальных прямых на части. Эти части можно рассматривать как матрицы низших порядков, из которых сама матрица A построена как из элементов. Они называются *клетками* матрицы A , а сама матрица A , разбитая определенным образом на клетки, называется *клеточной* матрицей.

Одна и та же матрица может быть разбита на клетки различными способами. Например,

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right].$$

Удобство разбиения на клетки состоит в том, что основные операции над клеточными матрицами совершаются по тем же правилам, как и над обыкновенными.

В самом деле, пусть некоторая матрица A каким-то способом разбита на клетки A_{ij} :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Умножая все клетки на число α , мы умножим на α все элементы матрицы A . Следовательно,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \dots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пусть B — какая-либо матрица, разбитая на такое же число клеток, что и A :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Предположим, кроме того, что соответственные клетки матриц A и B имеют соответственно равные числа строк и столбцов. Чтобы сложить матрицы A и B , надо, согласно определению, сложить их соответственные элементы. Однако то же самое произойдет и в том случае, если мы сложим соответственные клетки этих матриц. Поэтому

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Перейдем теперь к умножению клеточных матриц. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{np} \end{bmatrix},$$

разбитые на клетки A_{ij} , B_{jk} таким образом, что число столбцов клетки A_{ij} равняется числу строк клетки B_{jk} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, p$). При этом условии выражения

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \dots + A_{in}B_{nk}$$

имеют смысл. Легко показать, что

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & \dots & C_{mp} \end{bmatrix},$$

т. е. что матрицы, разбитые надлежащим образом на клетки, можно перемножать обычным путем.

Квадратные матрицы чаще всего приходится разбивать на клетки так, чтобы диагональные клетки также были квадратными. Если две квадратные матрицы разбиты на клетки таким образом, что их клетки, стоящие на диагонали, — квадратные и размеры соответствующих диагональных клеток совпадают, то это разбиение удовлетворяет как условиям, при которых возможно поклеточное сложение, так и условиям, которые необходимы для возможности их умножения в качестве клеточных матриц. Клеточная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ — квадратные клетки, а 0 — нулевые матрицы соответственных размерностей, называется *клеточно диагональной*. Вместо этого говорят также, что A *распадается на части* $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ (или A является *распавшейся матрицей*), или, что A есть *прямая сумма* матриц $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$. Символически:

$$A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{nn}.$$

Операции над распавшимися матрицами приводятся к операциям над их диагональными клетками. Отсюда следует, что если $\varphi(\lambda)$ — некоторый многочлен и A — клеточно-диагональная (распавшаяся) матрица, то

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} \varphi(A_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(A_{22}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(A_{nn}) \end{bmatrix}.$$

Матричная запись систем линейных уравнений. Матричные обозначения позволяют в компактной форме

8. Сформулируйте правило вычисления элементов матриц $(AB)'$, $(AB)^{-1}$, если элементы матриц A и B принадлежат произвольному ассоциативному кольцу.

9. Вычислите A^n , если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

§ 3. Определитель квадратной матрицы

Определение детерминанта. Рассмотрим квадратную матрицу A n -го порядка над коммутативным кольцом K . Поставим этой матрице в соответствие число (элемент кольца K), которое может быть вычислено по элементам матрицы A с помощью операций умножения, сложения и вычитания, согласно следующему определению.

О п р е д е л е н и е 1. *Детерминантом (определителем) матрицы порядка $n > 1$ называется число*

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k},$$

где M_{1k} — детерминант матрицы порядка $(n-1)$, полученной из A вычеркиванием первой строки и k -го столбца. Детерминант матрицы первого порядка совпадает с ее единственным элементом. $\odot$

Вычислим, пользуясь этим определением, детерминант матрицы второго порядка

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} a_{22} + (-1)^{2+1} a_{12} a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Для матрицы третьего порядка имеем, аналогично,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+1} a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3+1} a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Определитель M_{ik} называется *дополнительным минором* элемента a_{ik} . Кроме обозначения $\det A$, используют обозначение $|A|$. В дальнейшем будем пользоваться обоими способами обозначения детерминанта (определителя).

Введенное определение конструктивно. Оно дает процедуру (алгоритм) вычисления определителя матрицы любого порядка. Для дальнейшего удобно ввести еще одно определение детерминанта. Прежде чем сделать это, опишем некоторые вспомогательные понятия.

Рассмотрим набор n чисел натурального ряда $1, 2, \dots, n$. Всякий набор тех же чисел, расположенных в другом порядке $s_1, s_2, \dots, s_n$, называется *перестановкой*.

Перестановку $1, 2, 3, \dots, n$ называют *основной*.

Всего, очевидно, имеется $n!$ перестановок. Назовем *беспорядком* или *инверсией* в некоторой перестановке положение, при котором два числа s_i и s_j расположены друг относительно друга не так, как в основной перестановке (т. е. большее число левее меньшего). Например, в перестановке 23154 три инверсии (2 левее 1, 3 левее 1, 5 левее 4).

Перестановки называют *четными*, если число инверсий четное, и *нечетными*, если это число нечетное.

Теперь все подготовлено к тому, чтобы ввести

О п р е д е л е н и е 2. *Детерминантом матрицы n -го порядка* называется алгебраическая сумма $n!$ слагаемых всевозможных произведений n элементов матрицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца, т. е. слагаемых вида $a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n}$. Слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $s_1 s_2 \dots s_n$ — четная, и со знаком минус в противном случае. $\odot$

Можно показать, что определение 2 эквивалентно определению 1. Мы не будем доказывать соответствующую теорему (см., например, [35]), но при выводе свойств определителя будем использовать оба определения.

Прежде чем приступить к описанию свойств определителей, установим некоторые свойства перестановок.

Назовем перемену местами элементов в перестановке *транспозицией*.

Л е м м а. *Всякая транспозиция меняет четность перестановки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма очевидна, если переставляемые символы стоят рядом. Пусть переставляемые

символы расположены произвольно:

$$\begin{aligned} & \dots \alpha k_1 k_2 \dots k_m \beta \dots \\ & \dots \beta k_1 k_2 \dots k_m \alpha \dots \end{aligned}$$

Будем последовательно переставлять α с $k_1, k_2, \dots, k_m, \beta$. При этом мы совершим $(m+1)$ транспозиций рядом стоящих символов. После этого будем переставлять β последовательно с $k_m, k_{m-1}, \dots, k_1$. При этом совершим m транспозиций рядом стоящих символов. Всего мы совершили $(2m+1)$ транспозиций. Так как $2m+1$ — нечетное число, лемма доказана.

С л е д с т в и е. Пусть имеется слагаемое детерминанта $a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n}$. Для того чтобы определить знак слагаемого, можно не располагать сомножители в порядке возрастания первых индексов. Пусть эти множители расположены произвольно, т. е. слагаемое имеет вид $a_{r_1 t_1} a_{r_2 t_2} \dots a_{r_n t_n}$. Можно пользоваться следующим правилом: если обе перестановки $r_1 r_2 \dots r_n$ и $t_1 t_2 \dots t_n$ имеют одинаковую четность, то берем знак плюс, а если разную, то — минус. $\odot$

Действительно, если четности перестановок совпадают, переставив в слагаемом сомножители так, чтобы перестановка $r_1 r_2 \dots r_n$ была основной, мы подвергнем перестановки одинаковому числу транспозиций. Следовательно, силу леммы, перестановки будут иметь одинаковую четность. Так как основная перестановка четная, то четной будет и другая перестановка. Слагаемое надо брать знаком плюс. Аналогично доказательство случая разной четности перестановок.

Свойства определителей. 1. Детерминант не меняется при транспонировании матрицы:

$$|A| = |A'|.$$

Рассмотрим слагаемое левого детерминанта $a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n}$. При транспонировании матрицы множители в том слагаемом снова окажутся в разных строчках и разных столбцах, но они будут по другому занумерованы: $a_{s_2 2} \dots a_{s_n n}$. Знак тоже будет один и тот же, так как в обоих случаях определяется четностью перестановки $s_2 \dots s_n$. $\odot$

$$b) \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Равенство а) прямо следует из того, что

$$a_{1s_1} \dots (a'_{is_i} + a''_{is_i}) \dots a_{ns_n} = \\ = a_{1s_1} \dots a'_{is_i} \dots a_{ns_n} + a_{1s_1} \dots a''_{is_i} \dots a_{ns_n}.$$

Аналогично доказывается и свойство б).

6. Определитель не изменится, если к какой-нибудь его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число, т. е. справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1} & \dots & a_{in} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{jn} + \lambda a_{in} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Разложим левый определитель по свойству 5. Тогда первый определитель в этом разложении будет совпадать с правым, а второй будет равен нулю, так как у него будут две одинаковые строки.

7. Для квадратной матрицы A порядка n имеет место равенство

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|,$$

которое является прямым следствием свойства линейности 5б).

8. Разложение детерминанта по строке и столбцу. Так как в любое слагаемое детерминанта входит один элемент i й строки, то можно записать равенство

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

A_{ij} называется алгебраическим дополнением, или адьюнктом к элементу a_{ij} . Аналогичную формулу можно написать для элементов j -го столбца.

✱ Согласно определению $1 A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, где M_{1k} — дополнительный минор элемента a_{1k} . Аналогичное соотношение справедливо для любого алгебраического дополнения, именно

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (\text{AM})$$

где M_{ij} — дополнительный минор элемента a_{ij} , равный по определению детерминанту матрицы порядка $(n-1)$,

получаемой после вычеркивания из матрицы A i -й строки и j -го столбца.

Докажем формулу (AM). Переставим i -ю строку матрицы на первое место. При этом придется выполнить $(i-1)$ перестановку строк. Значит, определитель умножится на $(-1)^{i-1}$ и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будет равно

$$A_{ij} = (-1)^{i-1} (-1)^{j+1} M_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Доказано следующее

Предложение 1. Для каждой матрицы A порядка n при произвольном i ($1 \leq i \leq n$) имеет место формула

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

и при любом j ($1 \leq j \leq n$) — формула

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \odot$$

Эти формулы называются *формулами разложения детерминанта соответственно по строке и столбцу*.

Докажем еще справедливость формулы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0 \quad \text{при } i \neq k, \quad (1)$$

которую словами можно передать так:

Произведение элементов любой строки определителя на соответственные алгебраические дополнения другой строки равно нулю. Действительно, написанное выражение совпадает с детерминантом матрицы, у которой i -я и k -я строки совпадают и равны $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, а определитель такой матрицы равен нулю в соответствии со свойством 3. Аналогичная (1) формула справедлива и для разложения детерминанта по элементам произвольного столбца. Именно,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0 \quad \text{при } k \neq j. \quad (2)$$

9. **Определитель полураспавшейся матрицы.** Квадратная матрица называется *полураспавшейся*, если ее можно разбить на 4 клетки так, чтобы на диагонали стояли квадратные матрицы, а одна из двух других матриц целиком состояла из нулей. Иначе говоря, матрица A — полураспавшаяся, если она имеет один из следующих двух видов:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right].$$

Предложение 2. *Определитель полураспавшейся матрицы равен произведению определителей ее диагональных клеток.*

Для матрицы 2-го порядка это утверждение очевидно, так как

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Считая утверждение истинным для матриц $(n-1)$ -го порядка, докажем, что оно верно и для произвольной полураспавшейся матрицы A . Пусть эта матрица имеет вид

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{rs} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где A_{11} и A_{22} — квадратные матрицы порядка s и r ($s + r = n$). Разложим определитель матрицы A по элементам первого столбца:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{s+1}a_{s1}M_{s1}.$$

Так как все миноры M_{11} являются определителями полураспавшихся матриц, то в силу индуктивного предположения они равны произведению определителей диагональных клеток этих матриц. Одна из этих клеток совпадает для всех миноров с матрицей A_{22} , другая — с минором матрицы A_{11} , который мы будем обозначать $\bar{M}_{11}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\bar{M}_{11}|A_{22}| - a_{21}\bar{M}_{21}|A_{22}| + \dots + (-1)^{s+1}a_{s1}\bar{M}_{s1}|A_{22}| = \\ &= (a_{11}\bar{M}_{11} - a_{21}\bar{M}_{21} + \dots + (-1)^{s+1}a_{s1}\bar{M}_{s1})|A_{22}| = \\ &= |A_{11}||A_{22}|. \odot \end{aligned}$$

С л е д с т в и е. *Определители полураспавшейся и клеточно диагональной матриц вида*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

равны произведению определителей диагональных клеток этих матриц.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что последовательное разбиение этих матриц на 4 клетки сводит задачу к предыдущей.

З а м е ч а н и е 1. Определение детерминанта квадратной матрицы годится и для случая произвольного ассоциативного (не обязательно коммутативного) кольца. При этом остаются справедливыми, например, свойства 4, 5а), 9. Доказательство остальных свойств детерминанта по существу связано с коммутативностью кольца K .

Определитель произведения матриц. Справедлива

Т е о р е м а 1. *Определитель произведения квадратных матриц (с элементами из коммутативного кольца K) равен произведению определителей этих матриц.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны две квадратные матрицы A и B порядка n . Тогда на основании свойства 9 определителей справедливо равенство

$$|A||B| = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 \dots 0 & b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots -1 & b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выполним следующие преобразования над матрицей справа. Эти преобразования по свойству 5 не меняют величины определителя. К 1-й строке прибавим элементы $(n+1)$ строки, умноженные на a_{11} , элементы $(n+2)$ -й строки, умноженные на a_{12} , и т. д., элементы $2n$ й строки, умноженные на a_{1n} . В результате получится матрица, у которой первые n мест первой строки будут заполнены нулями, а остальные n мест заполнены произведениями первой

строки матрицы A на столбцы матрицы B . Теперь в полученной матрице аналогичные операции сделаем со 2-й, 3-й, ..., n -й строками, чтобы получить равенство

$$|A||B| = \begin{vmatrix} 0 \dots 0 & \sum a_{1i}b_{i1} \dots \sum a_{1i}b_{in} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ 0 \dots 0 & \sum a_{ni}b_{i1} \dots \sum a_{ni}b_{in} \\ \hline -1 \dots 0 & b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ 0 \dots -1 & b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Чтобы привести этот определитель к полураспавшемуся виду, меняем местами 1-й и $(n+1)$ -й, 2-й и $(n+2)$ -й, ..., n -й и $2n$ -й столбцы. В результате получим равенство

$$|A||B| = (-1)^n \begin{vmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} \dots \sum a_{1i}b_{i1} & \dots & 0 \\ \dots \dots \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{ni}b_{i1} \dots \sum a_{ni}b_{i1} & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & -1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ \dots & \dots & 0 \dots -1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что верхняя ненулевая клетка совпадает с матрицей AB . Вычисляя определитель полураспавшейся матрицы, получим требуемое утверждение:

$$|A||B| = (-1)^n (-1)^n |AB| = |AB|. \odot$$

Результат теоремы естественным образом распространяется на любое конечное число матриц. Например,

$$|ABC| = |AB||C| = |A||B||C|.$$

В частности, для любой матрицы A

$$|A^k| = |A|^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Поскольку транспонирование не меняет определителя матрицы, справедливо тождество

$$|A||B| = |AB| = |A'B| = |AB'| = |A'B'|.$$

Вычисление обратной матрицы. Воспользуемся теперь введенным понятием определителя для изучения свойств обратной матрицы.

Пусть A — квадратная матрица. Заменим в матрице A каждый элемент его алгебраическим дополнением и полученную матрицу транспонируем. Получившаяся в результате матрица называется *присоединенной* для A и обозначается A^* . Итак, по определению $A^* = [A_{ij}]'$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} . Из этого определения следуют важные соотношения

$$AA^* = A^*A = |A| E,$$

где E — единичная матрица. Действительно, на диагонали матриц AA^* и A^*A будут стоять члены вида

$\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$, равные определителю $|A|$ по свойству 8 определителя. Все остальные элементы этих матриц будут нулями в соответствии с формулами (1) и (2) свойства 8 определителя.

Докажем теперь теорему о существовании обратной матрицы.

Т е о р е м а 2. *Квадратная матрица A с элементами из коммутативного кольца K с единицей тогда и только тогда имеет обратную матрицу с элементами из K , когда определитель $|A|$ обратим в кольце K . Если обратная матрица существует, то ее определитель равен обратной величине определителя заданной матрицы.*

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть для A существует обратная матрица A^{-1} с элементами из кольца K . Тогда по теореме 1 имеем

$$|AA^{-1}| = |A| |A^{-1}| = |E| \quad 1.$$

Отсюда следует, что элемент кольца $|A|$ имеет обратный, именно $|A|^{-1} = |A^{-1}|$, и этот обратный элемент тоже принадлежит кольцу K , так как обратная матрица состоит из элементов кольца K .

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть определитель $|A|$ имеет в кольце K обратный $|A|^{-1}$. Тогда, умножив равенство

$$AA^* = A^*A = |A| E$$

слева на $|A|^{-1}$, получим

$$|A|^{-1} A A^* = |A|^{-1} A^* A = |A|^{-1} |A| E = E,$$

откуда следует, что

$$A^{-1} = |A|^{-1} A^*. \odot$$

С л е д с т в и е. Матрица A с элементами из некоторого поля имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. $\odot$

Доказанная теорема, таким образом, утверждает, что для каждой квадратной матрицы A , определитель которой обратим в кольце, существует обратная матрица A^{-1} , элементы которой b_{ij} вычисляются по формуле

$$b_{ij} = |A|^{-1} A_{ji},$$

где A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A .

П р и м е р 1. В кольце целых чисел только элементы $+1$ и -1 имеют обратные. Поэтому целочисленная квадратная матрица тогда и только тогда имеет обратную целочисленную матрицу (т. е. обратную матрицу с элементами из кольца целых чисел), когда определитель заданной матрицы есть либо $+1$, либо -1 .

П р и м е р 2. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}(t) x_1(t) + a_{12}(t) x_2(t) &= b_1(t), \\ a_{21}(t) x_1(t) + a_{22}(t) x_2(t) &= b_2(t), \end{aligned}$$

коэффициенты которой являются элементами кольца функций, непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$. Матричная запись приведенной системы имеет вид

$$A(t) x(t) = b(t).$$

Элемент кольца непрерывных функций $f(t)$ имеет в этом кольце обратный в том и только в том случае, если $f(t) \neq 0$ ни в одной точке $t_0 \leq t \leq t_1$. По доказанной теореме данная система уравнений имеет непрерывное решение тогда и только тогда, когда $|A(t)| \neq 0$ ни в одной точке $t_0 \leq t \leq t_1$. Решение запишется в этом случае в виде

$$x(t) = A^{-1}(t) b(t).$$

в $(n - 1)$ -е уравнение, вычислим x_{n-1} , далее, подставляя x_{n-1} и x_n в $(n - 2)$ -е уравнение, получим значение x_{n-2} и т. д. В этом случае мы получим вполне определенные значения для всех неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Поскольку решение системы n уравнений с n неизвестными сводится к вычислению обратной матрицы, то методом Гаусса можно эффективно вычислять обратную матрицу. Пусть дана матрица A . Напишем систему уравнений $Ax = b$ и выразим все неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ через элементы $b_1, b_2, \dots, b_n$. Эти формулы имеют вид

$$x_i = \alpha_{i1}b_1 + \dots + \alpha_{in}b_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Так как из $Ax = b$ следует $x = A^{-1}b$, то матрица $[\alpha_{ij}]$ и будет искомой обратной матрицей.

З а м е ч а н и е. Алгоритм Гаусса, вообще говоря, не годится для вычисления обращения матрицы с элементами из кольца, поскольку в кольце даже для ненулевых элементов может не существовать обратных. Поэтому, например, приведенный выше пример 2 нельзя решить с помощью алгоритма Гаусса. В подобных ситуациях необходимо вычислить обратную матрицу, пользуясь ее определением $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$. При этом нам придется выполнить только одну операцию деления: вычислить $|A|^{-1}$.

Обратную матрицу можно построить, как нетрудно показать, с помощью алгоритма Гаусса, если решить n систем линейных уравнений вида $Ax = e_i$, где e_i — i -й столбец единичной матрицы. При этом i -й столбец матрицы A^{-1} будет решением системы $Ax = e_i$. Иногда этим соображением удобно пользоваться для нахождения обратной матрицы.

Задачи. 1. Сформулируйте еще два определения детерминанта, отличающиеся от данных в тексте.

2. Вычислите определители матриц:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 + 1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 + 1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 + 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Найдите максимальное значение, которое может принимать определитель 4-го порядка, если все его элементы — числа ± 1 .

4. В какой перестановке чисел $1, 2, \dots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?

5. Имеет ли обратную матрицу $A(t)$ с элементами из кольца функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$? Элементы матрицы $A(t)$:

$$a_{11}(t) = 5t - 2, \quad a_{12}(t) = 3t^2 - 1, \quad a_{22}(t) = 2 - t, \quad a_{21}(t) = t^2 - 1.$$

§ 4. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений

Понятие определителя будет использовано для определения важнейшей числовой характеристики произвольной прямоугольной матрицы — ранга матрицы. Всюду в этом параграфе исходное кольцо K является полем.

Линейная зависимость. Напомним, что строки (столбцы) одной и той же длины n являются матрицами одинакового размера, которые можно складывать между собой и умножать на числа в соответствии с введенными правилами действий с матрицами.

О п р е д е л е н и е 1. n строк (столбцов) одинаковой длины $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае, т. е. если существует n чисел α_i , одновременно не равных нулю и таких, что выполнено равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, система n строк (столбцов) $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется *линейно зависимой*. $\odot$

Линейную комбинацию, все коэффициенты которой равны нулю, принято называть *тривиальной*. С помощью этого термина определение линейной зависимости можно сформулировать так.

Система строк (столбцов) *линейно зависима*, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих строк (столбцов). Система строк (столбцов) *линейно независима*, если только тривиальная линейная комбинация этих строк (столбцов) равна нулю.

Сформулируем ряд простых предложений, связанных с введенным понятием.

П р е д л о ж е н и е 1. Система из n строк (столбцов) $n > 1$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы одна из строк (одна из столбцов) является линейной комбинацией остальных.

Н е о б х о д и м о с т ь. Если система линейно зависима, то хотя бы один из коэффициентов в равенстве $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ отличен от нуля. Пусть $\alpha_i \neq 0$, тогда можно записать

$$x_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} x_n,$$

т. е. i -я строка (столбец) является линейной комбинацией остальных.

Достаточность. Если какая-то строка (столбец) есть линейная комбинация остальных строк (столбцов), то выполнено равенство $x_i = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, а это и есть линейная комбинация n строк (столбцов), причем не все коэффициенты в этой комбинации — нули (например, $\alpha_i = 1$). $\odot$

Предложение 2. Система строк (столбцов), которая содержит нулевую строку (нулевой столбец), является линейно зависима.

; Нулевая строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов). Значит, согласно предложению 1 система с нулевой строкой (с нулевым столбцом) линейно зависима.

Предложение 3. Если некоторые из строк (столбцов) $x_1, \dots, x_r$ ($r \leq n$) составляют сами по себе линейно зависимую подсистему, то и вся система $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависима.

Действительно, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация некоторых из строк (столбцов) $x_1, x_2, \dots, x_r$, то добавив к ним остальные строки (столбцы) с нулевыми коэффициентами, получим равную нулю нетривиальную линейную комбинацию всех строк (столбцов).

Предложение 4. Любые строки (столбцы), входящие в линейно независимую систему, сами по себе образуют линейно независимую систему.

В самом деле, если бы часть строк (столбцов) линейно независимой системы была бы линейно зависима, то согласно предыдущему предложению была бы линейно зависима и вся данная система строк (столбцов).

Предложение 5. Если строка (столбец) x является линейной комбинацией строк (столбцов) $x_1, x_2, \dots, x_r$, то она (он) является также линейной комбинацией любой системы строк (столбцов), содержащей $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Для доказательства к данной линейной комбинации достаточно добавить недостающие строки (столбцы) с нулевыми коэффициентами.

Ранг матрицы. Пусть дана произвольная матрица A ($m \times n$). Выберем в этой матрице k строк и k столбцов,

Прибавим теперь к $(r+1)$ -й строке матрицы A первые r строк той же матрицы, умноженные соответственно на числа $(-x_1), (-x_2), \dots, (-x_r)$, удовлетворяющие (1), и обозначим новые элементы через $a'_{r+1,1}, a'_{r+1,2}, \dots, a'_{r+1,m}$. Из (1) следует, что $a'_{r+1,1} = a'_{r+1,2} = \dots = a'_{r+1,r} = 0$. Предположим, что не все остальные числа новой $(r+1)$ -й строки равны нулю. Пусть, например, $a'_{r+1,k} \neq 0$ для некоторого $k > r$. Согласно пятому свойству определителей (§ 3), имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{r+1,k} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель, стоящий справа, по последней строке, находим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{r+1,k} \end{vmatrix} = a'_{r+1,k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное соотношение противоречит условию, что ранг матрицы A равен r . Значит, $a'_{r+1,k}$ может быть только нулем. Итак, новая $(r+1)$ -я строка матрицы целиком состоит из нулей, а это значит, что $(r+1)$ -я строка матрицы A есть линейная комбинация первых r строк той же матрицы. $\odot$

С л е д с т в и е 1. Число линейно независимых строк произвольной матрицы равно числу линейно независимых столбцов этой матрицы и равно рангу матрицы.

С л е д с т в и е 2. Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то по крайней мере одна из его строк (один из столбцов) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов). $\odot$

При вычислении ранга матрицы удобно пользоваться так называемыми элементарными преобразованиями матриц.

О п р е д е л е н и е 5. Элементарными преобразованиями матриц являются следующие преобразования: 1) перестановка столбцов (строк), 2) отбрасывание ненулевого общего множителя элементов данного столбца (строки),

3) прибавление к одному столбцу (строке) другого столбца (строки) с произвольным множителем, 4) зачеркивание столбца (строки), состоящего из одних нулей, 5) зачеркивание столбца (строки), являющегося линейной комбинацией других столбцов (строк). $\odot$

В качестве простого упражнения предлагаем читателю доказать

Предложение 6. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.* $\odot$

Напомним, что приведенный в предыдущем разделе алгоритм Гаусса использует лишь элементарные преобразования матрицы, и поэтому его можно применять для вычисления ранга матрицы и для нахождения ее базисного минора.

Теорема Кронекера — Капелли. Займемся изучением структуры решений систем линейных уравнений.

Систему линейных уравнений $Ax = b$, где A — матрица размеров $(n \times m)$, назовем *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае.

Заметим, что сама запись системы есть не что иное, как запись того факта, что столбец правых частей $b' = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ системы есть линейная комбинация столбцов матрицы той же системы, взятых соответственно с коэффициентами $x_1, x_2, \dots, x_m$. Поэтому для того, чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы столбец правых частей был линейной комбинацией столбцов матрицы A системы. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

называется *расширенной матрицей* системы $Ax = b$.

Напомним, что в случае системы из n уравнений с n неизвестными, когда определитель матрицы системы отличен от нуля, система имеет единственное решение, которое вычисляется по формуле $x = A^{-1}b$, или, если подробно выписать формулы для всех компонентов вектора x , в виде

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где через Δ_i обозначен детерминант матрицы, получаемый

из матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов b . Формулы (2) называются *формулами Крамера*, или *правилом Крамера*.

Перейдем к исследованию общего случая. Основным результатом является

Т е о р е м а 2 (Кронекера — Капелли). *Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы равнялся рангу матрицы системы.*

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть ранг матрицы A равен рангу матрицы $\bar{A}$. Выберем в матрице A любой базисный минор. Согласно условию теоремы минор будет базисным и для матрицы $\bar{A}$. Но тогда столбец правых частей есть линейная комбинация базисных столбцов матрицы A . Следовательно, он будет линейной комбинацией всех столбцов матрицы A , т. е. система совместна.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система совместна. Предположим, что ранг матрицы A равен r . Ясно, что ранг матрицы $\bar{A}$ не может быть меньше r . Докажем, что он равен r . Для этого достаточно показать, что все миноры порядка $r + 1$ матрицы $\bar{A}$ равны нулю, так как в этом случае будут равны нулю и все миноры большего порядка. Выберем в матрице $\bar{A}$ произвольный минор порядка $r + 1$. Если он не содержит столбца правых частей системы, то этот минор равен нулю, в силу того, что ранг матрицы A равен r . Предположим, что выбранный минор содержит элементы столбца матрицы правых частей. Не ограничивая общности можно считать, что этот минор таков:

$$\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & b_{r+1} \end{vmatrix}.$$

Возможны два случая: либо в первых r столбцах этого минора не содержится ни одного базисного минора матрицы A , либо содержится хотя бы один базисный минор. В первом случае, разложив минор по элементам последнего столбца, убедимся в том, что он равен нулю, так как все алгебраические дополнения элементов последнего столбца будут нулями. Во втором случае первые r столбцов матрицы A являются базисными, и по теореме 1 все ос-

тальные столбцы матрицы A есть линейные комбинации базисных столбцов. Кроме того, условие совместности системы означает, что последний столбец расширенной матрицы $\bar{A}$ есть линейная комбинация столбцов матрицы A , и поэтому он есть линейная комбинация лишь первых r ее столбцов. Отсюда вытекает, что последний столбец минора Δ_{r+1} есть линейная комбинация остальных его столбцов, и на основании пятого свойства определителя мы заключаем, что сам минор равен нулю. $\odot$

Система линейных алгебраических уравнений называется *однородной*, если все элементы правых частей равны нулю. Система, не являющаяся однородной, называется *неоднородной*.

Однородная система всегда совместна, так как она заведомо имеет решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Это решение называется *тривиальным*. Ранг матрицы любой системы не может быть по определению больше, чем число неизвестных, поэтому, учитывая теорему Кронекера—Капелли, легко установить справедливость следующих утверждений.

Предложение 7. *Для того чтобы система линейных уравнений имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен числу неизвестных.*

Предложение 8. *Для того чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.* $\odot$

Сумма любого решения системы $Ax = b$ с любым решением однородной системы $Ax = 0$ снова будет решением системы $Ax = b$. Действительно, пусть $Ax_0 = b$ и $Ax_1 = 0$. Тогда $A(x_0 + x_1) = Ax_0 + Ax_1 = b + 0 = b$. Докажем теперь обратное утверждение. Каково бы ни было решение x системы $Ax = b$, оно всегда представимо в виде $x = \bar{x} + x_0$, где $\bar{x}$ — частное решение системы $Ax = b$, а x_0 — решение однородной системы. Пусть x — решение $Ax = b$. Вычтем из этого уравнения уравнение $A\bar{x} = b$. Тогда получим $A(x - \bar{x}) = 0$. Это равенство означает, что $x - \bar{x}$ является решением однородной системы. Обозначим это решение через x_0 . Тогда $x - \bar{x} = x_0$, откуда $x = x_0 + \bar{x}$. *Общее решение* — это символ (формула), содержащий все решения системы. Мы доказали следующее

Предложение 9. *Общее решение совместной системы уравнений $Ax = b$ имеет вид $x = \bar{x} + x_0$, где $\bar{x}$ — некоторое частное решение этой системы, а x_0 — общее решение соответствующей однородной системы $Ax = 0$.*

Фундаментальная система решений. Найдем общее решение однородной системы $Ax = 0$.

Рассмотрим матрицу A коэффициентов однородной системы $Ax = 0$. Пусть ее ранг равен r , а базисный минор расположен в верхнем левом углу. Заметим, что последние $m - r$ уравнений можно отбросить, так как они являются линейными комбинациями первых r уравнений. Запишем эти r уравнений в виде

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1m}x_m,$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2m}x_m,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rm}x_m.$$

Положим сперва $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = \dots = x_m = 0$. Тогда систему можно решить по правилу Крамера и получить столбец решений $x^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0\}$. Далее положим $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = \dots = x_m = 0$, и, решив полученную систему, найдем единственное решение $x^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_r^{(2)}, 0, 1, 0, \dots, 0\}$. Продолжая вычисления, получим $(m - r)$ -е решение

$$x^{(m-r)} = \{x_1^{(m-r)}, x_2^{(m-r)}, \dots, x_r^{(m-r)}, 0, 0, \dots, 1\}.$$

Покажем теперь, что всякое решение однородной системы может быть получено в виде линейной комбинации вычисленных решений $x^{(1)}, \dots, x^{(m-r)}$. В самом деле, пусть

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_m)$$

— какое-либо решение системы $Ax = 0$. Покажем, что оно представимо в виде $c = \lambda_1 x^{(1)} + \dots + \lambda_{m-r} x^{(m-r)}$. Для этого рассмотрим некоторое вспомогательное решение $x^* = c - c_{r+1}x^{(1)} - c_{r+2}x^{(2)} - \dots - c_m x^{(m-r)}$. x^* является решением системы $Ax = 0$, поскольку это линейная комбинация решений этой системы. Заметим да-

лее, что x^* имеет вид $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(m-r)})$.

Докажем, что и первые r компонент решения x^* тоже суть нули. Для этой цели подставим решение x^* в систему $Ax = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^* + \dots + a_{1r}x_r^* &= 0, \\ \dots & \\ a_{r1}x_1^* + \dots + a_{rr}x_r^* &= 0. \end{aligned}$$

Эти тождества могут удовлетвориться только нулевым набором, ибо детерминант соответствующей системы — не нуль и ее решение единственно. Итак, все компоненты x^* суть нули. Значит,

$$c = c_{r+1}x^{(1)} + \dots + c_{m-r}x^{(m-r)},$$

что и утверждалось. $\circ$

Заметим, что полученные при доказательстве теоремы решения (их число $m - r$) линейно независимы. Эта система решений называется *нормальной фундаментальной системой решений*.

Вообще всякая конечная совокупность решений системы $Ax = 0$ такая, что, во-первых, всякое решение системы выражается в виде линейной комбинации элементов этой совокупности и, во-вторых, никакое из решений построенной совокупности не является линейной комбинацией остальных решений этой совокупности, называется *фундаментальной системой решений*.

Таким образом, общее решение линейной системы $Ax = b$ выражается формулой

$$x = \bar{x} + c_1x^{(1)} + \dots + c_{m-r}x^{(m-r)},$$

где $\bar{x}$ — некоторое частное решение неоднородной системы, а $x^{(1)}, \dots, x^{(m-r)}$ — фундаментальная система решений однородной системы. Наиболее простой вид имеет нормальная фундаментальная система решений.

О численном решении линейных систем. Красота и стройность теории линейных уравнений обманчива. Вычисление решений за приемлемое время, при ограниченной точности задания чисел в машине и при конечной точности вычислений, связано со значительными трудностями. Обратимся к примерам.

1. Если для решения уравнения $Ax = b$ воспользоваться правилом Крамера, а определитель $|A|$ вычислять как сумму $n!$ произведений, каждое по n сомножителей, то нетрудно подсчитать, что при скорости 10^8 умножений в секунду для решения системы 16-го порядка потребуется более 8 лет. Если для решения этой системы использовать алгоритм Гаусса, который требует порядка $\frac{4}{3}n^3$ умножений, то при той же скорости вычислений решение будет получено за время, меньшее 0,1 сек.

2. Определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 2^{-N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

равен 2^{-N} , и потому решение уравнения $Ax = b$ существует и единственно при любом N . В то же время при достаточно большом N число 2^{-N} будет воспринято машиной как нуль, и система уже не имеет ни одного решения при $b \neq 0$. Таким образом, малые изменения коэффициентов системы могут приводить к потере всех решений.

3. Решим систему [43]

$$\begin{cases} 0,0001x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$$

используя алгоритм Гаусса и выполняя арифметические операции на машине с плавающей запятой с тремя десятичными знаками. Если взять на первом шаге в качестве ненулевого элемента 1-й строки коэффициент при x_1 , то получим

$$\begin{cases} 0,0001x_1 + x_2 = 1, \\ -10\,000x_2 = -10\,000, \text{ откуда } x_2 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$$

Если в качестве ненулевого элемента 1-й строки взять на первом шаге коэффициент при x_2 , то имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 = 1, \text{ откуда } x_2 = 1, x_1 = 1. \end{cases}$$

Точное решение, округленное до указанных десятичных цифр: $x_1 = 1,00010$, $x_2 = 0,99990$.

Приведенные примеры иллюстрируют некоторые трудности, связанные с практическим вычислением решений линейных уравнений. Эти трудности возрастают с ростом порядка решаемой системы. На практике решают линейные системы с 1000 и более неизвестных.

Задачи. 1. Вычислите ранг матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 10,5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Выпишите нормальную фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0, \\ x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

3. При каком условии три прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ проходят через одну точку?

4. Докажите, что с помощью элементарных преобразований строк квадратную матрицу можно привести к «треугольному» виду, когда все ее элементы снизу от главной диагонали равны нулю.

§ 5. Характеристический и минимальный многочлены матрицы

Будем рассматривать квадратные матрицы порядка n с элементами из некоторого поля K .

Подобные матрицы. Матрица A называется *подобной* матрице B , если существует такая неособенная матрица X , что $A = X^{-1}BX$. В этом случае также говорят, что A получается преобразованием матрицы B при помощи X . Умножая это равенство слева на X и справа на X^{-1} , получим

$$B = XAX^{-1} = (X^{-1})^{-1}AX^{-1}.$$

Таким образом, из подобия A с B вытекает подобие B с A . Далее, если

$$A = X^{-1}BX, \quad B = Y^{-1}CY,$$

то подстановкой получим

$$A = X^{-1}Y^{-1}CYX = (YX)^{-1}C(YX).$$

Следовательно, две матрицы, подобные третьей, подобны между собой. Наконец, каждая матрица, очевидно, подобна самой себе.

Укажем некоторые свойства подобных матриц.

1. Для того чтобы преобразовать с помощью матрицы X сумму матриц, достаточно преобразовать с помощью X каждое слагаемое. В самом деле,

$$X^{-1}(A_1 + A_2 + \dots + A_k)X = X^{-1}A_1X + X^{-1}A_2X + \dots + X^{-1}A_kX.$$

2. Для того чтобы преобразовать с помощью матрицы X произведение матриц, достаточно преобразовать с помощью X каждый сомножитель. Действительно,

$$X^{-1}A_1X X^{-1}A_2X \dots X^{-1}A_kX = X^{-1}(A_1A_2 \dots A_k)X.$$

3. Для того чтобы преобразовать степень матрицы, достаточно преобразовать основание степени

$$X^{-1}A^mX = (X^{-1}AX)^m;$$

при $m \geq 0$ имеем предыдущий случай. Если же $m < 0$, то пусть $k = -m$. Тогда

$$X^{-1}A^mX = X^{-1}(A^{-1})^kX = (X^{-1}A^{-1}X)^k = (X^{-1}AX)^{-k} = (X^{-1}AX)^m.$$

4. Преобразованное значение многочлена от матрицы равно значению многочлена от преобразованной матрицы, иными словами

$$X^{-1}f(A)X = f(X^{-1}AX).$$

Эта формула непосредственно вытекает из свойств 1—3, так как значение многочлена от A получается из A с помощью операций возведения в степень, умножения на число и сложения.

Характеристический многочлен матрицы. Матрица $[\lambda E - A]$, где λ — независимая переменная, называется *характеристической матрицей* для A . Ее определитель

$$\Phi(\lambda) = |\lambda E - A| \quad (XM)$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* A . Наивысшую степень относительно λ в этом многочлене будет иметь произведение диагональных элементов

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn}).$$

Все остальные, входящие в состав определителя произведения имеют степень не выше $(n - 2)$. Это следует из того, что если один из сомножителей этого произведения будет $-a_{ij}$ ($i \neq j$), то это произведение не будет содержать множителями $(\lambda - a_{ii})$, $(\lambda - a_{jj})$ и будет, следовательно, степени не более $(n - 2)$. Таким образом, $\varphi(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn}) \vdash$ члены степени не выше $(n - 2)$ или $\varphi(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots$. Сумма диагональных элементов матрицы называется ее *следом*:

$$\text{след } A = \text{Sp } A = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}).$$

Последняя формула для $\varphi(\lambda)$ показывает, что степень характеристического многочлена равна порядку матрицы, старший коэффициент характеристического многочлена равен 1, а коэффициент при λ^{n-1} равен следу матрицы, взятому с обратным знаком. Полагая в формуле $(XM)\lambda^0 = 0$, мы получим

$$\varphi(0) = |-A| = (-1)^n |A|.$$

$\varphi(0)$ — свободный член характеристического многочлена. Он равен определителю матрицы, умноженному на $(-1)^n$, где n — порядок матрицы.

Теорема 1. *Характеристические многочлены подобных матриц равны друг другу.*

Доказательство. Пусть

$$A = X^{-1}BX.$$

Тогда для характеристического многочлена матрицы A получим

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= |\lambda E - X^{-1}BX| = |X^{-1}(\lambda E - B)X| = \\ &= |X^{-1}| |\lambda E - B| |X|. \end{aligned}$$

При последнем преобразовании мы воспользовались теоремой о детерминанте произведения квадратных матриц. Определители $|X^{-1}|$ и $|X|$ взаимно обратны и их произведение равно единице. Поэтому

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - A|. \quad \odot$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что подобные матрицы имеют одинаковые следы и определители, так

как след и определитель матрицы, взятые с надлежащими знаками, являются коэффициентами ее характеристического многочлена.

Равенство характеристических многочленов — необходимое, но, вообще, говоря, не достаточное условие подобия матриц. Например, характеристические многочлены матриц

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

равны, однако A не может быть подобна E , так как для любой матрицы X имеем $X^{-1}EX = E$.

Корни характеристического многочлена называются *характеристическими числами*, или *собственными значениями*, или *собственными числами матрицы A* .

Из следствия на стр. 38 следует

Предложение 1. *Характеристические многочлены распадавшейся и полураспадавшейся матриц равны произведению характеристических многочленов их диагональных клеток. $\odot$*

Если полураспадавшаяся матрица A состоит из клеток степени 1, то A называют *треугольной матрицей*. Собственные значения треугольной матрицы очевидно равны ее диагональным элементам.

Теорема Кэли — Гамильтона. В § 2 мы любому многочлену $\varphi(\lambda)$ ставили в соответствие матрицу $\varphi(A)$, названную значением многочлена $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = A$. Если $\varphi(A) = 0$, говорят, что A есть корень $\varphi(\lambda)$.

Теорема 2 (Кэли — Гамильтона). *Каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.*

Доказательство. Пусть A — квадратная матрица. Обозначим через B присоединенную матрицу для характеристической матрицы $[\lambda E - A]$ (см. определение присоединенной матрицы в § 3).

Элементы матрицы B обозначим через β_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Эти элементы являются адъюнктами определителя $|\lambda E - A|$ и поэтому представляют собой многочлены от λ , степени которых не превосходит $(n - 1)$. Пусть

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(0)} + \beta_{ij}^{(1)}\lambda + \dots + \beta_{ij}^{(n-1)}\lambda^{n-1}.$$

со старшим коэффициентом, равным 1. Он называется *минимальным многочленом матрицы*.

Предложение 2. *Каждая матрица A имеет только один минимальный многочлен.*

Доказательство. Если бы существовало два различных минимальных многочлена $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, тогда разность $\psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)$ была бы ненулевым многочленом, корнем которого является матрица A , а степень этого многочлена меньше, чем степень $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$. $\odot$

Предложение 3. *Всякий многочлен $f(\lambda)$, корнем которого является матрица A , делится без остатка на минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ этой матрицы.*

Доказательство. Пусть верно обратное, т. е.

$$f(\lambda) = \psi(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$$

и $r(\lambda) \neq 0$. Подставим в это тождество матрицу A :

$$f(A) = 0 = \psi(A)q(A) + r(A),$$

так как $\psi(A) = 0$, то $r(A) = 0$, но степень $r(A)$ меньше степени делителя $\psi(A)$. Таким образом, $r(A)$ — ненулевой многочлен, корнем которого является матрица A и степень которого меньше степени минимального многочлена. Это противоречит определению минимального многочлена. $\odot$

Следствие. *Минимальный многочлен матрицы является делителем ее характеристического многочлена.* $\odot$

Сопровождающая матрица многочлена. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

обладает замечательным свойством. Ее характеристический многочлен совпадает с нормированным (с коэффициентом 1 при старшем члене) многочленом n -го порядка, коэффициенты которого расположены в нижней строке этой матрицы с обратными знаками. Таким образом,

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = |\lambda E - A|.$$

Убедимся в справедливости этого равенства. Для этого удобнее всего раскрыть определитель $|\lambda E - A|$ по эле-

ментам последней строки согласно свойству 8 определителя:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_2 & \lambda + \alpha_1 \end{bmatrix} = \alpha_n (-1)^{n-1} (-1)^{n+1} + \\ + \alpha_{n-1} (-1)^n \lambda (-1)^{n+2} + \alpha_{n-2} \lambda^2 (-1)^{n-3} (-1)^{n+3} + \dots \\ \dots + \alpha_{n-i-1} (-1)^{2(n-i)(n+1)} \lambda^{i-1} + \dots + (\lambda + \alpha_1) \lambda^{n-1} = \\ = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = \Phi(\lambda).$$

По заданному нормированному многочлену сопровождающая матрица строится крайне просто. В ее нижней строке располагаются n коэффициентов характеристического многочлена, элементы, расположенные справа от диагональных, равны единице, а остальные элементы матрицы — нули. Эта матрица и ее транспонированная матрица будут играть важную роль в дальнейшем.

Задачи. 1. Показать, что если в прямой сумме переставить слагаемые, то новая сумма будет матрицей, подобной старой сумме.

2. Вычислить характеристические многочлены и собственные значения матриц

$$E, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

3. Доказать, что след $(AB) = \text{след } (BA)$, след $(A + B) = \text{след } A + \text{след } B$.

4. Показать, что характеристический многочлен матрицы AB совпадает с характеристическим многочленом матрицы BA .

5. Доказать, что любая квадратная матрица A подобна своей транспонированной A' .

6. Найдите ошибку в рассуждении. Так как $\Phi(\lambda) = |\lambda E - A|$, то $\Phi(A) = |AE - A| = |0| = 0$, и следовательно, справедлива теорема Кэли — Гамильтона.

§ 6. Линейные векторные пространства

Линейное пространство и модуль. Для прямоугольных матриц одинакового размера определены алгебраическая операция сложения и операция умножения на числа (элементы некоторого кольца или поля), которая не является алгебраической. Изучение строения таких множеств имеет важное значение для всех дальнейших построений.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть дана некоторая совокупность R элементов произвольной природы $x, y, z, \dots$, в которой задана алгебраическая операция «сложения». Пусть, далее, задано некоторое поле K и определена операция «умножения» элементов из R на элементы поля K , которые мы будем называть числами. Умножение всегда выполнимо и однозначно для любых элементов x, y, z из R и любых чисел α, β, γ из K . Совокупность элементов R будем называть *линейным векторным пространством над полем K* , если операции «сложения» и «умножения» элемента из R на число из K удовлетворяют следующим требованиям (аксиомам, постулатам):

$$1. x + y = y + x.$$

$$2. (x + y) + z = x + (y + z).$$

3. Если y, z — элементы R , то уравнение $y + x = z$ разрешимо в R .

$$4. 1 \cdot x = x.$$

$$5. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

$$6. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

$$7. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Элементы множества R мы будем называть *векторами*. $\odot$

О п р е д е л е н и е 2. Если в определении 1 линейного пространства поле K заменить кольцом K с единицей, то получим определение *модуля* над кольцом K . $\odot$

Поскольку всякое поле является кольцом, то всякое линейное пространство является модулем. Обратное, вообще говоря, не верно. Модуль может и не обладать свойствами линейного пространства.

Первые три аксиомы линейного пространства совпадают с первыми тремя аксиомами в определении кольца. Поэтому доказательство существования в линейном пространстве единственного нулевого элемента и единственного элемента, противоположного заданному, в точности совпадает с приведенным в § 1 доказательством аналогичных утверждений для кольца. Будем обозначать нулевой элемент линейного пространства числом 0, т. е. точно так же, как и нулевой элемент поля K , участвующего в определении линейного пространства. По смыслу формул всегда будет ясно, какой нуль имеется в виду.

Линейное пространство над полем вещественных чисел принято называть *вещественным линейным пространством* и обозначать буквой R . Линейное пространство

над полем комплексных чисел называют *комплексным* и обозначают буквой $\mathbb{C}$.

Мы будем обозначать векторы строчными латинскими буквами, а числа, как правило, греческими.

Сумму векторов x и $(-y)$ обозначают $x - y$ и называют *разностью* векторов x и y .

Легко видеть, что для любого вектора x выполнено равенство $0x = 0$. В самом деле,

$$0x = 0x + x - x = (1 + 0)x - x = 0.$$

Отметим также, что произведение любого числа на нулевой вектор равно нулевому вектору, поскольку

$$\alpha \cdot 0 = \alpha(x - x) = \alpha x - \alpha x = 0.$$

Если $\alpha x = 0$, то либо $\alpha = 0$, либо $x = 0$. Действительно, пусть $\alpha \neq 0$. Тогда можно умножить данное равенство на α^{-1} и получить $1 \cdot x = 0$.

Выражение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ называют *линейной комбинацией* векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Приведем несколько примеров линейных пространств.

1. Множество вещественных чисел по отношению к обычным операциям сложения и умножения будет вещественным векторным пространством. В этом примере векторы пространства и элементы поля принадлежат одному и тому же множеству (и те и другие — просто вещественные числа).

2. Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента. Такое пространство называется *нулевым*. Единственный элемент является нулем этого пространства и противоположным самому себе элементом.

3. Множество многочленов от λ степени $\leq n$ над некоторым полем $\mathbb{K}$ с установленными в нем обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число образует, как нетрудно проверить, линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

4. Совокупность направленных отрезков (векторов) на плоскости с обычными операциями сложения векторов и умножения их на числа является векторным пространством.

5. Совокупность бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, в которой операции определены

естественным образом:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots), \\ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots),\end{aligned}$$

как нетрудно проверить, представляет собой линейное пространство.

Линейная зависимость. По аналогии с соответствующими определениями для строк и столбцов матрицы определим линейно независимую и линейно зависимую системы векторов в линейном пространстве.

О п р е д е л е н и е 3. Векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ из линейного пространства R называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа из поля K $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

В случае, если не существует подобной линейной зависимости, векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно независимыми*.

Если векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы, то один из векторов может быть представлен в виде линейной комбинации остальных. Так, например, если $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$, то

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n.$$

Относительно линейно зависимых и линейно независимых систем векторов справедливы те же положения, которые были доказаны для систем линейно независимых строк и столбцов в § 4.

Приведем формулировки соответствующих утверждений. Предлагаем читателю в качестве упражнения получить доказательства этих утверждений.

П р е д л о ж е н и е 1. Система из $n > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

П р е д л о ж е н и е 2. Если в систему входит нулевой вектор, то она линейно зависима.

П р е д л о ж е н и е 3. Если некоторые из векторов, входящих в систему, сами по себе образуют линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима.

Предложение 4. Каждая подсистема линейно независимой системы сама линейно независима.

Размерность и базис. Введем теперь важные определения размерности и базиса линейного пространства.

Определение 4. Линейное пространство R называется *конечномерным*, а число n — *числом измерения* этого пространства, или его *размерностью* (пишут $\dim R = n$), если в R существует n линейно независимых векторов, в то время как любые $n + 1$ векторов из R линейно зависимы. Если же в пространстве можно найти линейно независимую систему из любого числа векторов, то пространство называется *бесконечномерным*. $\odot$

Мы будем иметь дело главным образом с конечномерными пространствами.

Определение 5. Система из n линейно независимых заданных в определенном порядке векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ в n -мерном пространстве называется *базисом* этого пространства. $\odot$

Из этого определения следует, что из одной и той же системы векторов можно получить разные базисы, по-разному нумеруя векторы.

Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис n -мерного векторного пространства R , а x — произвольный вектор этого пространства. Тогда векторы $x, e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависимы (ибо число их равно $n + 1$)

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0,$$

где по крайней мере одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ отлично от нуля. Однако в данном случае $\alpha_0 \neq 0$, так как векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ не могут быть связаны линейной зависимостью. Поэтому

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

где $x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (x_i — числа!).

Заметим, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ однозначно определяются заданием вектора x и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. В самом деле, если имеется другое разложение для вектора

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,$$

то, вычитая это разложение почленно из предыдущего, получим

$$(x_1 - \beta_1) e_1 + (x_2 - \beta_2) e_2 + \dots + (x_n - \beta_n) e_n = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \dots + \alpha_m x_{1m} &= 0, \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_m x_{2m} &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \dots + \alpha_m x_{nm} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система однородных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, согласно теореме Кронекера - Капелли (см. § 4), имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных, т. е. меньше m . Поэтому равенство этого ранга числу m является необходимым и достаточным условием для линейной независимости векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$. Таким образом, имеет место следующая

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы векторы $x_1, x_2, \dots, x_m$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из координат этих векторов в произвольном базисе, был равен числу векторов m .* ○

Замена базиса. Если в n -мерном пространстве даны два базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$, то можно разложить каждый вектор базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$f_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Координаты p_{ij} можно записать в виде квадратной матрицы порядка n

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Столбцы матрицы — это координатные столбцы векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Поэтому столбцы матрицы P — линейно независимы и $\det P \neq 0$.

О п р е д е л е н и е 6. Матрицу, i -й столбец которой есть координатный столбец вектора f_i по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, назовем *матрицей перехода* от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$. ○

Равенство (1) можно переписать в матричных обозначениях

$$[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] P,$$

или

$$\bar{f} = eP.$$

Умножая обе части этого равенства на матрицу P^{-1} справа, мы получим

$$e = fP^{-1}.$$

Отсюда следует, что P^{-1} будет матрицей перехода от базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Предложение 5. Пусть задан базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Каждая матрица P с детерминантом, не равным нулю, служит матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к некоторому базису $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Действительно, если $\det P \neq 0$, столбцы матрицы P линейно независимы. Они служат координатными столбцами n линейно независимых векторов, которые и составляют пужный нам базис. $\odot$

Вычислим, как связаны между собой компоненты одного и того же вектора в двух базисах $e_1, \dots, e_n$; $f_1, \dots, f_n$. Рассмотрим вектор x и обозначим через $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ его координатные столбцы в базисах e и f . Это означает, в частности, что $x = f\bar{\beta}$. Подставим сюда выражение f через e и матрицу перехода P от базиса e к базису f . Мы получим $x = eP\bar{\beta}$. Но, с другой стороны, $x = e\bar{\alpha}$. Сравнивая два последних выражения, в силу единственности координатного столбца имеем

$$\alpha = P\beta.$$

Подробнее эта формула может быть переписана в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Линейные подпространства. Из геометрии известно, что вектор, равный сумме любого числа векторов, лежащих в одной и той же плоскости, принадлежит этой плоскости. В произвольном линейном пространстве роль множеств, обладающих свойствами, подобными указанному свойству плоскости, играют линейные подпространства.

Определение 7. Непустое подмножество R_1 линейного пространства называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отноше-

нию к определенным в R операциям сложения и умножения на число. $\odot$

Иначе говоря, $R_1 \subseteq R$ есть подпространство, если из $x \in R_1$, $y \in R_1$ следует, что $\alpha x + \beta y \in R_1$ при любых α и β .

Во всяком линейном пространстве R имеется подпространство, состоящее из одного нуля, — нулевое подпространство. С другой стороны, все R можно рассматривать как свое подпространство.

Пусть дано некоторое множество M векторов в линейном пространстве R . Обозначим через R_1 совокупность всевозможных линейных комбинаций, каждая из которых составлена из конечного числа векторов, принадлежащих M . Нетрудно проверить, что множество R_1 является подпространством в R . Так построенное подпространство R_1 называется *линейной оболочкой множества M* .

Предложение 6. Каждое подпространство пространства конечной размерности является линейной оболочкой конечного числа векторов. $\odot$

Доказательство оставляем читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим два подпространства R_1 и R_2 одного линейного пространства R .

Определение 8. Суммой подпространств R_1 и R_2 назовем множество всех векторов, которые можно представить в виде $x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 принадлежат соответственно подпространствам R_1 и R_2 . Обозначение суммы: $R_1 + R_2$. $\odot$

Сумма подпространств является подпространством. Действительно, если y и x лежат в $R_1 + R_2$, то существуют векторы x_1 и y_1 в R_1 и векторы x_2 и y_2 в R_2 такие, что $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Отсюда имеем

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),$$

и при любом α , кроме того, $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$. Поскольку $x_1 + y_1$ и αx_1 находятся в R_1 , а $x_2 + y_2$ и αx_2 находятся в R_2 , мы видим, что $x + y$ и αx принадлежат сумме $R_1 + R_2$.

Сумму подпространств можно определить и как линейную оболочку множества всех векторов, которые принадлежат хотя бы одному из суммируемых подпространств.

О п р е д е л е н и е 9. Назовем *пересечением* подпространств R_1 и R_2 и обозначим $R_1 \cap R_2$ множество векторов, которые принадлежат одновременно обоим подпространствам. $\odot$

П р е д л о ж е н и е 7. Пересечение $R_1 \cap R_2$ есть подпространство.

Действительно, если векторы x и y лежат в $R_1 \cap R_2$, то они лежат и в R_1 , и в R_2 . Поэтому вектор $x + y$ и вектор αx при любом α также лежат и в R_1 , и в R_2 , а следовательно, и в $R_1 \cap R_2$. $\odot$

Пусть R_1 и R_2 —два подпространства в пространстве конечной размерности. Рассмотрим в их сумме $R_1 + R_2$ следующую систему векторов. Если пересечение $R_1 \cap R_2$ — не нулевое пространство, то возьмем базис $e_1, \dots, e_k$ в $R_1 \cap R_2$ и дополним его векторами $f_1, \dots, f_n$ до базиса в R_1 и векторами $g_1, \dots, g_m$ до базиса в R_2 . Если же $R_1 \cap R_2$ — нулевое пространство, то просто берем объединение базиса в R_1 и базиса в R_2 . Каждый вектор в $R_1 + R_2$ является линейной комбинацией выбранных нами векторов. Это следует из того, что $x = x_1 + x_2$, где x_1 лежит в R_1 , а x_2 — в R_2 . Тогда x_1 разлагается по векторам $f_1, \dots, f_n, e_1, \dots, e_k$, а x_2 — по векторам $e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m$.

Теперь покажем, что рассматриваемая система векторов линейно независима. Возьмем какую-нибудь линейную комбинацию этих векторов

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^k \beta_j e_j + \sum_{s=1}^m \gamma_s g_s = 0.$$

Вектор $x = \sum_{s=1}^m \gamma_s g_s$ лежит в R_2 . Но, очевидно,

$$x = - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i - \sum_{j=1}^k \beta_j e_j,$$

и поэтому x лежит и в R_1 . Таким образом, вектор x должен находиться в пересечении $R_1 \cap R_2$. Отсюда можно заключить, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots$

$\gamma_m = 0$. В приведенной линейной комбинации остаются только члены $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_k e_k$, если $R_1 \cap R_2 \neq \neq 0$. Но и их коэффициенты равны нулю, так как векторы

$e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно независимы. Мы показали, что система векторов $f_1, \dots, f_n; e_1, \dots, e_k; g_1, \dots, g_m$ является базисом в подпространстве $R_1 + R_2$. Отсюда вытекает следующая

Т е о р е м а 2. *Размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, размерность R_1 равна $n + k$, размерность R_2 равна $k + m$, размерность $R_1 \cap R_2$ есть k , а размерность суммы $R_1 + R_2$, как показано выше, равна $k + n + m$. $\odot$

Если пересечение подпространств R_1 и R_2 — нулевое пространство, то сумма $R_1 + R_2$ называется *прямой суммой*. Размерность прямой суммы равна сумме размерностей слагаемых. Базис в прямой сумме состоит из векторов $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$, где $f_1, \dots, f_n$ — базис в R_1 , а $g_1, \dots, g_m$ — базис в R_2 . Отсюда следует, что каждый вектор в прямой сумме разлагается в сумму векторов x_1 из R_1 и x_2 из R_2 единственным образом. Для обозначения прямой суммы используют знак $\oplus$ или $+$.

Понятия суммы, пересечения и прямой суммы легко могут быть перенесены на любое конечное число подпространств.

П р и м е р ы. Назовем три векторных пространства, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1. Совокупность всевозможных систем n вещественных чисел (иногда говорят: совокупность n -ок вещественных чисел) $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, где сложение и умножение определяются формулами

$$\begin{aligned} [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] + [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] &= [x_1 + y_1 \ x_2 + y_2 \ \dots \ x_n + y_n], \\ \alpha [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] &= [\alpha x_1 \ \alpha x_2 \ \dots \ \alpha x_n], \end{aligned}$$

являются n -мерным векторным пространством и обозначается символом R^n .

2. Обозначим $C^m[t_0, t_1]$ множество m -ок, элементы которых являются непрерывными функциями времени, определенными на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Мы будем записывать элементы пространства $C^m[t_0, t_1]$ как вектор-столбцы

в виде

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \text{ или } u'(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)].$$

Легко проверить, что $C^m[t_0, t_1]$ образует линейное пространство, если определить операции сложения и умножения на скаляры естественным образом:

$$u(t) + v(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) + v_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) + v_m(t) \end{bmatrix}, \quad \alpha u(t) = \begin{bmatrix} \alpha u_1(t) \\ \vdots \\ \alpha u_m(t) \end{bmatrix}.$$

Пространство $C^m[t_0, t_1]$ является бесконечномерным пространством.

3. Пусть $R^{n \times m}$ — множество матриц размером $(n \times m)$ над полем вещественных чисел. Используя определение сложения матриц и умножения их на числа, получим линейное векторное пространство над полем вещественных чисел. Это пространство $(n \times m)$ -мерно. Заметим, что пространство R^n является частным случаем пространства $R^{n \times m}$ при $m = 1$.

Задачи. 1. Укажите какойнибудь базис в пространствах: R^n , $R^{2 \times 2}$, R^1 .

2. Найдите размерность линейного подпространства, натянутого на векторы $a = [1 \ 3 \ 2 \ 4]$; $b = [4 \ 6 \ 5 \ 4]$; $c = [3 \ 7 \ 4 \ 3]$.

3. Образует ли совокупность векторов на плоскости, начала которых находятся в начале координат, а концы — в пределах первой четверти, линейное пространство (с обычными операциями)?

4. Рассмотрите совокупность P одних положительных вещественных чисел. Введите операции по следующим правилам: под «сложением» двух чисел будем понимать их обычное умножение, а под произведением элемента $r \in P$ на вещественное число λ будем понимать (обычное) возведение в степень λ числа r . Является ли P с указанными операциями линейным пространством? Если да, то какова размерность этого пространства?

5. Является ли линейным пространством совокупность всех векторов из R^n таких, что их координаты удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$?

6. Доказать, что сумма Σ линейных подпространств R_1 и R_2 тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $x \in \Sigma$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$.

7. Линейные оболочки векторов $\{t^2 + 1, t^2 + t, 1\}$, $\{t^2, t\}$ образуют подпространства пространства многочленов степени $n \leq 2$. Укажите базис в пересечении и в сумме этих подпространств.

8. Какую размерность имеет пространство комплексных чисел, заданное над полем вещественных чисел? Укажите базис этого пространства.

9. Докажите, что размерность пересечения n подпространств не превосходит минимальной из размерностей этих подпространств.

§ 7. Линейные преобразования и их матрицы

Задание отображения одного линейного пространства в другое означает задание некоторой функции, «аргументами» которой являются элементы одного линейного пространства, а «значениями» — элементы другого линейного пространства.

Линейные операторы. Пусть даны два линейных пространства X и Y . Рассмотрим отображение A линейного пространства X в линейное пространство Y ; общепринятое обозначение такого отображения $A: X \rightarrow Y$. Если это отображение переводит вектор x пространства X в вектор y пространства Y , то мы будем писать $y = A(x)$, или короче: $y = Ax$, или $x \xrightarrow{A} y$.

Отображение A называют *линейным преобразованием*, или *линейным оператором*, или *морфизмом*, если оно удовлетворяет двум условиям:

1. $A(x + y) = Ax + Ay$ для любых x, y из X .
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax$ для любого $x \in X$ и любого числа α .

Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с линейными операторами, то слово «линейный» чаще всего будем опускать.

В равенстве $y = Ax$ вектор y называют *образом* вектора x , а вектор x — *прообразом* вектора y . Совокупность всех прообразов называется *областью определения* оператора A , а совокупность всех образов — *областью значений*. Для области значений A используют обозначение: $\text{range } A$.

По самому определению оператора область его определения есть все пространство X , область же его значений есть подпространство пространства Y . Мы пока ничего не говорим о размерности X и Y . Они могут быть как конечномерными, так и бесконечномерными.

Рассмотрим примеры. 1. Оператор, который каждому вектору x пространства X ставит в соответствие нулевой вектор пространства Y , является очевидно линейным

оператором. Его область значений есть нулевое подпространство.

2. Поставим в соответствие каждому вектору x пространства X этот же вектор x . Мы получим линейный оператор E , действующий из X в X . Этот оператор называется *тождественным* или *единичным* оператором. Его область значений есть все пространство X .

3. Если каждому вектору x поставить в соответствие вектор αx , то это линейный оператор. Он называется *скалярным* оператором.

4. Рассмотрим соотношение

$$x = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt. \quad (1)$$

где $B(t)$ — матрица размеров $(n \times m)$, составленная из непрерывных на отрезке $t_0 < t < t_1$ функций, а $u(t)$ — m -мерная непрерывная вектор-функция $u(t) \in C^m[t_0, t_1]$. *Интегралом от матрицы* по определению называется матрица, составленная из интегралов элементов матрицы. Аналогично определяется *производная от матрицы*. Таким образом, по определению, если $A(t) = [a_{ij}(t)]_{m \times n}$, то

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t) dt = \left[\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t) dt \right]_{m \times n}, \quad \frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]_{m \times n}.$$

Приведенное соотношение (1) является линейным оператором, который ставит в соответствие каждому элементу $u(t)$ пространства $C^m[t_0, t_1]$ элемент x пространства R^n .

Символически $B: C^m[t_0, t_1] \rightarrow R^n$, или $u(t) \xrightarrow{B} x$. Этот линейный оператор действует из бесконечномерного пространства $C^m[t_0, t_1]$ в n -мерное R^n .

Матрицы линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}$ есть линейный оператор, отображающий пространство R^n в m -мерное пространство R^m , т. е. $\mathcal{A}: R^n \rightarrow R^m$. Выберем некоторый базис в $R^m \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ и базис в $R^n \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Вектор e_1 переводится оператором $\mathcal{A}$ в некоторый вектор $\mathcal{A}e_1$ пространства R^m , который, как и любой вектор этого пространства, можно разложить по базисным векторам

$$\mathcal{A}e_1 = \alpha_{11}f_1 + \alpha_{21}f_2 + \dots + \alpha_{m1}f_m.$$

R^n , и $(m \times n)$ матрицами, составленными из элементов поля K , устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Пример 1. Рассмотрим линейное пространство многочленов от t степени ≤ 3 с коэффициентами из числового поля K . Это пространство R^4 . Оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ относит каждому многочлену из R^4 некоторый многочлен степени на единицу меньше. Таким образом, этот оператор отображает $R^4 \rightarrow R^3$, т. е. $\frac{d}{dt} : R^4 \rightarrow R^3$. Оператор дифференцирования является линейным оператором, так как

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t) + \psi(t)) = \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{d\psi(t)}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(\alpha\varphi(t)) = \alpha \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Выберем в пространстве R^4 базис $\{1, t, t^2, t^3\}$, а в пространстве R^3 — базис $\{1, t, t^2\}$. Построим матрицу оператора дифференцирования в этих базисах. В столбцах этой матрицы, согласно указанному правилу, стоят координаты векторов

$$\frac{d}{dt}(1), \quad \frac{d}{dt}(t), \quad \frac{d}{dt}(t^2), \quad \frac{d}{dt}(t^3),$$

записанные в базисе $\{1, t, t^2\}$, поэтому матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Пусть дан оператор $\mathcal{A}$, действующий из R^3 в R^3 , и его матрица в некотором базисе равна A . Пусть, далее, в пространстве R^3 выбран вектор b , такой, что векторы b, Ab, A^2b линейно независимы. Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{b, Ab, A^2b\}$. Столбцами этой матрицы согласно правилу будут координаты векторов $\{Ab, A^2b, A^3b\}$, записанные в базисе $\{b, Ab, A^2b\}$. Вектор Ab имеет в этом базисе координаты $(0, 1, 0)$, вектор A^2b — координаты $(0, 0, 1)$, а вектор A^3b можно выразить как линейную комбинацию векторов b, Ab, A^2b , воспользовавшись теоремой Кэли — Гамильтона, которая утверждает, что матрица A является корнем своего характеристического многочлена. Характеристический

многочлен A запишем в виде

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3.$$

Таким образом, $A^3 - \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 E = 0$. Умножая это матричное равенство справа на вектор b , получим $A^3 b - \alpha_1 A^2 b - \alpha_2 A b - \alpha_3 b = 0$, и значит, координаты вектора $A^3 b$ в базисе $\{b, Ab, A^2 b\}$ имеют вид $\{-\alpha_3, -\alpha_2, -\alpha_1\}$. Матрица A в новом базисе имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Точно такие же рассуждения можно провести и в n -мерном случае (см. задачу 6).

Ранг и дефект линейного оператора. Пусть A — линейный оператор, определенный в пространстве R^n с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$. Область значений линейного оператора есть подпространство L , именно — линейная оболочка векторов $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ (докажите это). Размерность подпространства L определяется числом линейно независимых векторов среди $Ae_1, \dots, Ae_n$, или, что то же самое, рангом матрицы, элементы столбцов которой совпадают с координатами этих векторов, т. е. рангом матрицы оператора. Так как ранг матрицы оператора не зависит от выбора базисов (почему?), то размерность подпространства значений оператора зависит только от самого оператора. Мы будем называть размерность подпространства значений *рангом оператора A* и обозначать это число через r_A или $\text{rank } A$. Наряду с подпространством значений мы рассмотрим совокупность векторов $x \in R^n$, удовлетворяющих равенству $Ax = 0$. Эта совокупность векторов является подпространством и называется *ядром оператора* ($\ker A$). Размерность n_A ядра называется *дефектом оператора A* . Если мы обратимся к соответствующему координатному равенству $Ax = 0$, то легко понять, что дефект оператора A равен числу решений фундаментальной системы решений этой однородной системы уравнений, т. е. $n - r_A$. Отсюда следует $r_A + n_A = r_A + n - r_A = n$. Таким образом, размерность ядра и размерность области значений в сумме дают размерность пространства.

Рассмотрим теперь простейшие операции над операторами.

Пусть даны три пространства R^n , R^m , R^s и два линейных оператора $A: R^n \rightarrow R^m$ и $B: R^m \rightarrow R^s$. Произведением операторов A и B называется оператор C , отображающий $R^n \rightarrow R^s$ и такой, что при любом $x \in R^n$

$$Cx = B(Ax).$$

Произведение операторов записываются так: $C = BA$. Из линейности операторов B и A вытекает линейность оператора C . Выберем в пространствах R^n и R^m , R^s произвольные базисы $\{e\}$, $\{q\}$, $\{r\}$ и обозначим через A , B , C матрицы операторов A , B , C в данных базисах. Они имеют размерность $(m \times n)$, $(s \times m)$, $(s \times n)$ соответственно. Тогда операторным равенствам $y = Ax$, $z = By$, $z = Cx$ будут соответствовать координатные (матричные) равенства

$$y = Ax, \quad z = By, \quad z = Cx.$$

Из первых двух равенств находим

$$z = By = B(Ax) = BAx,$$

что означает $C = BA$. Таким образом, матрица произведения операторов равна произведению матриц операторов.

Аналогично легко показать, что матрица суммы операторов равна сумме матриц операторов, а оператору αA , где α — некоторый скаляр, соответствует матрица αA .

Рассмотренные операции вскрывают глубокую связь между линейными операторами и прямоугольными матрицами. Если мы пишем операторное равенство $y = Ax$, то формально можем считать, что y и x суть векторы-столбцы, A — прямоугольная матрица, а выражение Ax есть произведение двух прямоугольных матриц. Более того, если в действительности A есть сложная функция других операторов, сводящаяся к сложению операторов, умножению операторов и умножению операторов на число, то мы снова можем считать A матрицей, являющейся функцией той же структуры от составляющих матриц.

Столь глубокая связь между матрицами и операторами позволяет при изучении последних широко пользоваться всеми элементами теории матриц.

Линейные операторы в R^n . Линейный оператор, отображающий n -мерное пространство R^n само в себя, мы будем называть просто *линейным оператором в R^n* . Над линейными операторами в R^n имеют место все рассмотренные выше операции.

Сумма двух линейных операторов в R^n , а также произведение такого оператора на число — снова линейные операторы в R^n . Умножение двух таких линейных операторов всегда выполнимо, и произведение их есть снова линейный оператор в R^n . Поэтому нетрудно установить, что линейные операторы в R^n образуют кольцо. Выбор базиса в пространстве R^n устанавливает взаимнооднозначное соответствие (такое соответствие называется *изоморфизмом* или *изоморфным соответствием*) между кольцом линейных операторов в R^n и кольцом квадратных матриц n -го порядка с элементами из поля K .

Рассмотрим теперь, как изменяется матрица оператора при замене базиса в пространстве R^n . Пусть в R^n наряду с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ задан базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} y_e &= A_e x_e, \\ y_f &= A_f x_f, \end{aligned}$$

где A_e — матрица оператора в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$, а A_f — соответственно в базисе $\{f\}$. Пусть матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$ равна P , т. е.

$$\begin{aligned} y_e &= P y_f, \\ x_e &= P x_f; \end{aligned}$$

тогда имеем $y_e = A_e x_e$, $P y_f = A_e P x_f$; умножая последнее равенство слева на P^{-1} , получим $y_f = P^{-1} A_e P x_f$, т. е. $A_f = P^{-1} A_e P$. Матрицы, связанные последним отношением, мы определим как *подобные матрицы*. У этих матриц равны характеристические многочлены.

Таким образом, мы доказали важное

Предложение 1. *Две матрицы, соответствующие одному и тому же линейному оператору в R^n при различных базисах, подобны между собой, причем матрица P , связывающая эти матрицы, совпадает с матрицей преобразования координат при переходе от первого базиса ко второму. $\odot$*

Другими словами, линейному оператору в $\mathbf{R}^n$ отвечает класс подобных между собой матриц. Эти матрицы представляют данный оператор в различных базисах.

Но мы уже описали выше процедуру записи оператора в различных базисах пространства $\mathbf{R}^n$. Сравним эти два подхода на примере.

Пример 3. Пусть дана матрица оператора $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и даны два вектора $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ в пространстве $\mathbf{R}^2$, координаты которых соответствуют тому же базису, в котором представлена матрица A . Возьмем эти векторы в качестве нового базиса и вычислим матрицу оператора A в этом базисе. Ее столбцы суть координатные столбцы векторов Ae_1 и Ae_2 . Вычислим эти векторы:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь нужно найти координаты этих векторов по базису e_1, e_2 :

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2e_1 - \frac{4}{3}e_2,$$

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3e_1 - 2e_2.$$

Координаты вектора Ae_1 суть $\{2, -\frac{4}{3}\}$, вектора Ae_2 — $\{3, -2\}$. Значит, матрица A в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}.$$

Обратите внимание, что нам не понадобилось определять, какие векторы выбраны в пространстве $\mathbf{R}^n$ в качестве базиса. Важно лишь, чтобы A и e_1, e_2 были записаны в одном и том же базисе.

Рассмотрим второй способ. Он заключается в прямом вычислении $\tilde{A} = P^{-1}AP$, где P — матрица перехода к базису $\{e_1, e_2\}$, в столбцах которой стоят координаты

векторов e_i по старому базису. Значит,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{bmatrix}.$$

При втором способе нам пришлось вычислить обратную матрицу и выполнить 2^3 умножений. При первом способе объем вычислений значительно меньше. Здесь нам по-прежнему не было необходимости определять, какой же был базис в пространстве $\mathbf{R}^2$, относительно которого матрица A имела первоначальный вид, так как для того, чтобы выписать матрицу перехода к этому базису, нужно только знать координаты новых базисных векторов по старому базису. Координаты первоначальных базисных векторов по новому базису расположены в столбцах матрицы P^{-1} .

Обратный оператор. Продолжим изучение линейных операторов в $\mathbf{R}^n$. Поскольку ранг оператора равен рангу матрицы этого оператора, записанной в произвольном базисе, то всем операторам, ранг которых совпадает с размерностью пространства, соответствуют неособенные матрицы. Эти операторы называются *неособенными* или *невырожденными* операторами. Дефект невырожденного оператора равен нулю, а ядро состоит только из нулевого вектора. Поскольку для такого оператора любой вектор x связан взаимно-однозначным соответствием с вектором y по формуле $y = Ax$, то и для каждого y определен единственный вектор x , который можно рассматривать как образ элемента y . Определенный таким образом оператор называется *обратным* оператором и обозначается A^{-1} . Таким образом, если для неособенного оператора справедливо равенство $y = Ax$, то по определению $x = A^{-1}y$. Нетрудно показать, что если в $\mathbf{R}^n$ фиксирован базис и оператору A соответствует в этом базисе матрица A , то оператору A^{-1} будет соответствовать матрица A^{-1} .

Собственные векторы. Пусть в линейном пространстве R^n задан оператор A . Подпространство $\mathcal{K}$ пространства R^n называется *инвариантным относительно оператора A* , если из $x \in \mathcal{K}$ следует $Ax \in \mathcal{K}$. В частности, тривиальные подпространства — нулевое, и все пространство является инвариантным для всякого линейного оператора. нас будут интересовать, конечно, нетривиальные подпространства. Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства оператора A . Если $\mathcal{K}$ — одномерное инвариантное подпространство, то любой вектор x из $\mathcal{K}$ оператор A переводит в вектор λx , т. е. $Ax = \lambda x$. Ненулевой вектор x , удовлетворяющий этому равенству для некоторого числа λ , называется *собственным вектором оператора A* . Число λ из этого равенства называется *собственным числом или собственным значением оператора A* , соответствующим собственному вектору x . Совокупность всех собственных значений называется *спектром* оператора.

Нетрудно понять, что собственными векторами нулевого оператора, тождественного оператора и скалярного оператора будут все векторы пространства R^n . Эти операторы имеют лишь по одному собственному числу, равному соответственно 0, 1 и α .

Теорема 1. *Собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ оператора A с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ линейно независимы.*

Доказательство. Теорему докажем индукцией по числу n . Очевидно, что она верна при $n = 1$. Пусть она верна для всяких $(n - 1)$ собственных векторов оператора A , но не верна для векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда между этими векторами имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0, \quad (2)$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Применяя к этому равенству оператор A , получаем

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n = 0. \quad (3)$$

Умножая равенство (2) на λ_n и вычитая из (3), получим

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) x_1 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1} = 0.$$

Отсюда по индуктивному предположению следует, что все коэффициенты должны быть равны нулю. В частности,

$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) = 0$, что противоречит условию: $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_m$. Следовательно, векторы $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейно независимы. $\odot$

С л е д с т в и е. В n -мерном пространстве линейный оператор не может иметь более n собственных векторов с попарно различными собственными значениями.

Выясним вопрос о существовании собственных значений и собственных векторов. Выберем в пространстве R^n базис $\{e\}$, и пусть A есть матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторному равенству

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

однозначно соответствует матричное равенство

$$Ax = \lambda x,$$

или

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Рассматривая полученное соотношение как однородную систему линейных алгебраических уравнений, мы заключаем, что для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ имел собственные векторы, необходимо и достаточно, чтобы система

$$(A - \lambda E)x = 0$$

имела ненулевые решения, для чего, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы определитель $|A - \lambda E|$ равнялся нулю, т. е. собственные значения должны удовлетворять характеристическому уравнению $|A - \lambda E| = 0$. Это уравнение согласно основной теореме алгебры [10] имеет по меньшей мере один корень, вообще говоря, комплексный. Следовательно, всякий линейный оператор, действующий в комплексном линейном пространстве, т. е. в пространстве, в котором исходное поле K есть поле комплексных чисел, имеет по меньшей мере один собственный вектор. Чтобы вычислить координаты этого вектора, необходимо решить систему линейных уравнений

$$[A - \lambda^* E]x = 0,$$

где λ^* — корень уравнения $|A - \lambda E| = 0$. Если оператор действует в вещественном линейном пространстве, то он может и не иметь ни одного собственного вектора.

Напомним, что у подобных матриц характеристические многочлены совпадают и что $|A|$ и $\text{Sp}A$ являются инвариантами.

Треугольная форма матрицы. Если квадратная матрица имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то соответствующие этим значениям собственные векторы линейно независимы по теореме 1. Тогда с помощью матрицы P^{-1} , в столбцах которой стоят эти векторы, матрицу A преобразованием подобия $\hat{A} = PAP^{-1}$ можно привести к диагональному виду. На главной диагонали $\hat{A}$ будут располагаться собственные числа матрицы A . В том, что матрица $\hat{A}$ в базисе из собственных векторов, которые мы обозначим $a_1, a_2, \dots, a_n$, имеет диагональный вид, легко убедиться непосредственно. Действительно, пользуясь правилом (см. стр. 75) вычисления матрицы оператора в новом базисе, имеем $\hat{a}_i = Aa_i = \lambda_i a_i$, где a_i i -й столбец матрицы A .

Для матрицы A с произвольным набором собственных чисел существует базис, в котором она имеет треугольную форму. Об этом свидетельствует

Т е о р е м а 2. *Для любой вещественной квадратной матрицы A существует неособенная матрица P такая, что матрица $P^{-1}AP$ имеет треугольную форму. На главной диагонали этой матрицы расположены ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем индукцию, начав с двумерного случая. Пусть λ_1 — характеристическое число матрицы A , а c_1 — соответствующий этому числу собственный вектор. Рассмотрим преобразование подобия для матрицы A с помощью невырожденной матрицы P , первым столбцом которой является вектор c_1 . Так как $Ac_1 = \lambda_1 c_1$, а вектор $\lambda_1 c_1$ в базисе (c_1, a_1) имеет координаты $(\lambda_1, 0)$, то

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Так как матрицы A и $P^{-1}AP$ подобны, то они имеют одинаковые собственные значения и, следовательно, $\lambda_2 = a_2$.

Предположим теперь, что для матрицы A k -го порядка существует невырожденная матрица P_k такая, что

$B_k - P_k^{-1}AP_k$ имеет треугольную форму, и докажем, что тогда к треугольной форме приводится и матрица порядка $(k+1)$.

Пусть e_1 — собственный вектор матрицы порядка $(k+1)$, соответствующий характеристическому числу λ_1 . Выберем векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ так, чтобы система векторов $e_1, a_1, a_2, \dots, a_k$ была бы линейно независима. Выберем в качестве преобразования P_1 матрицу, столбцы которой $e_1, a_1, a_2, \dots, a_k$. Тогда непосредственной проверкой, как и в двумерном случае, убеждаемся, что

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_k & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

где B_k — матрица k -го порядка, а через $*$ здесь и далее обозначены, возможно, ненулевые элементы. Поскольку характеристическое уравнение правой части имеет вид

$$(\lambda_1 - \lambda) |B_k - \lambda E| = 0,$$

то характеристическими числами матрицы B_k являются величины $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}$, т. е. k остальных характеристических чисел матрицы A . По предположению индукции существует неособенная матрица P_k такая, что

$$P_k^{-1}B_kP_k = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & \dots & * \\ & \lambda_3 & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Построим теперь матрицу P_{k+1} следующим образом:

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_k & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $P_1 P_{k+1}$ является искомой матрицей преобразования A к треугольной форме. Действительно,

$$(P_1 P_{k+1})^{-1} A (P_1 P_{k+1}) = P_{k+1}^{-1} (P_1^{-1} A P_1) P_{k+1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_{k+1} \end{bmatrix} \cdot \odot$$

Задачи. 1. Постройте базис в области значений и в ядре оператора

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Выпишите матрицу оператора дифференцирования $\frac{d^2}{dt^2}$, действующего в пространстве R^4 многочленов степени не выше 3-й,

$$\frac{d^2}{dt^2}: R^4 \rightarrow R^4,$$

в базисе $\{1, t, t^2, t^3\}$. Постройте матрицу того же оператора, действующего из $R^4 \rightarrow R^2$, выбрав в качестве базиса пространства R^2 векторы $\{1 + t, t\}$.

3. Вычислите матрицу оператора

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

в базисе $x'_1 = \{1, 1, 1\}$, $x'_2 = [0, 1, 1]$, $x'_3 = [0, 0, 1]$.

4. Пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ — характеристические числа квадратной матрицы A , причем все не равны нулю. Вычислите характеристические числа матрицы A^2 .

5. Постройте базис пространства решений системы

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

6. Пусть $\varphi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ — характеристический многочлен матрицы A и пусть существует вектор b такой, что векторы $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$ линейно независимы. Запишите матрицу A в базисе из этих векторов.

7. Укажите пример линейного оператора в вещественном пространстве R^2 , не имеющего ни одного собственного вектора.

8. Докажите, что если A — треугольная матрица n -го порядка, все диагональные элементы которой равны нулю, то $A^n = 0$.

§ 8. Евклидовы пространства. Квадратичные формы

Скалярное произведение. В линейном пространстве отсутствует понятие, аналогичное понятию длины вектора обычного трехмерного геометрического пространства. Длину вектора линейного пространства можно определить с помощью понятия скалярного произведения.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть в вещественном линейном пространстве R каждой паре элементов x, y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое $\langle x, y \rangle$, т. е. задано отображение $\langle x, y \rangle: R^n \times R^n \rightarrow R^1$, и пусть при этом выполнены следующие требования:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (коммутативность).
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ (однородность).
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (дистрибутивность).
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = 0$ (дефинитность).

Тогда говорят, что в линейном пространстве R задано *скалярное произведение*. (○)

О п р е д е л е н и е 2. Вещественное линейное пространство с заданным скалярным произведением называется *евклидовым пространством* (n -мерным евклидовым пространством, если линейное пространство n -мерно). (○)

Рассмотрим примеры скалярных произведений в линейных пространствах.

1. Пусть R^n — вещественное линейное пространство всевозможных вектор-столбцов высоты n и пусть

$$x' = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad y' = [y_1, y_2, \dots, y_n]$$

— два вектора этого пространства. Тогда функция $\langle x, y \rangle = [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n]$, или, короче, $\langle x, y \rangle = x' y$, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Полученное n -мерное евклидово пространство обозначают E^n .

2. В линейном бесконечномерном пространстве $C^m[t_0, t_1]$ вектор-функций, непрерывных на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, введем скалярное произведение по формуле

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} u'(t) v(t) dt.$$

Полученное бесконечномерное евклидово пространство будем обозначать $C^m[t_0, t_1]$. Справедливость аксиом

скалярного произведения 1–4 вытекает из известных свойств определенных интегралов.

3. В линейном $(n \times m)$ -мерном пространстве матриц размеров $(n \times m)$, обозначенном нами $\mathbb{R}^{n \times m}$, скалярное произведение можно ввести по формуле

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij} = \text{tr } A'B = \text{Sp } A'B = \text{След } A'B.$$

Пользуясь свойствами следа матрицы (см. задачу 3 § 5), легко проверить, что все аксиомы скалярного произведения удовлетворяются. Полученное $(n \times m)$ -мерное пространство обозначим через $\mathbb{E}^{n \times m}$. $\odot$

Пользуясь аксиомами скалярного произведения, докажем важное неравенство

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad (\text{KB})$$

которое называется *неравенством Коши — Буняковского*. Напишем очевидное неравенство

$$\langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle \geq 0,$$

или

$$\alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Чтобы выполнялось это неравенство, дискриминант квадратного трехчлена должен быть неположителен (условие отсутствия у квадратного трехчлена действительных различных корней), т. е.

$$[\langle x, y \rangle]^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0,$$

или

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Пользуясь понятием скалярного произведения, введем понятие длины или *нормы* вектора линейного евклидова пространства по формуле

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Из аксиом скалярного произведения вытекают следующие свойства нормы:

1. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0.$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника). Неравенство 3 является прямым следствием неравенства Коши — Буняковского. Действительно,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 - \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 - \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle, \end{aligned}$$

так как по неравенству Коши — Буняковского

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Часто в линейном пространстве вводят норму независимо от скалярного произведения, полагая по определению, что $\|x(t)\|$ — числовая функция, удовлетворяющая аксиомам 1, 2, 3.

Линейное пространство, в котором определена норма вектора, называется *нормированным пространством*.

Ортогонализация базиса. Рассмотрим вопрос ортогонализации базиса евклидова пространства.

О п р е д е л е н и е 3. Два элемента евклидова пространства называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$. $\odot$

Из этого определения и свойства 4 скалярного произведения следует

П р е д л о ж е н и е 1. *Только нулевой вектор ортогонален каждому вектору евклидова пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\langle x, y \rangle = 0$ для всех y , то, положив $y = x$, имеем $\langle x, x \rangle = 0$, что возможно в силу аксиомы 4 только для нулевого вектора. $\odot$

Элемент евклидова пространства, длина (норма) которого равна единице, называется *ортом*.

Если $x \neq 0$, то вектор $x^0 = \frac{x}{\|x\|}$ является ортом. Действительно,

$$\|x^0\| = \sqrt{\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle} = \frac{\sqrt{\langle x, x \rangle}}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Т е о р е м а 1 (об ортонормированном базисе). *В n -мерном евклидовом пространстве существует базис из взаимно ортогональных элементов единичной длины — ортонормированный базис.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем какой-нибудь базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ и положим $e_1^0 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. Будем искать e_2^0 в виде $e_2 = f_2 - \alpha e_1^0$ и α выберем так, чтобы $\langle e_2, e_1^0 \rangle = 0$.

Так как $\langle e_2, e_1^0 \rangle = \langle f_2 - \alpha e_1^0, e_1^0 \rangle = \langle f_2, e_1^0 \rangle - \alpha \langle e_1^0, e_1^0 \rangle = 0$, то достаточно взять $\alpha = \langle f_2, e_1^0 \rangle$. Найденный вектор $e_2 \neq 0$, так как в противном случае мы получили бы, что векторы f_1 и f_2 линейно зависимы. Положим $e_2^0 = \frac{e_2}{|e_2|}$. Продолжим это построение. Ищем $e_3 = f_3 - \beta e_1^0 - \gamma e_2^0$, где β и γ подберем так, что $\langle e_3, e_1^0 \rangle = 0$, $\langle e_3, e_2^0 \rangle = 0$. Умножая выражение для e_3 скалярно сначала на e_1^0 , а затем на e_2^0 , найдем, что

$$\beta = \langle f_3, e_1^0 \rangle, \quad \gamma = \langle f_3, e_2^0 \rangle,$$

причем $e_3 \neq 0$, так как в противном случае f_1, f_2, f_3 были бы линейно зависимы. Продолжая этот процесс, мы найдем систему взаимно ортогональных векторов $e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0$ единичной длины. Эта система ортов линейно независима. Действительно, допустим противное, т. е. пусть $\alpha_1 e_1^0 + \alpha_2 e_2^0 + \dots + \alpha_s e_s^0 + \dots + \alpha_n e_n^0 = 0$ и, например, $\alpha_s \neq 0$. Умножив это равенство скалярно на e_s^0 , получим $\langle e_s^0, e_s^0 \rangle = 0$, т. е. $e_s^0 = 0$. Это противоречие доказывает, что система $e_1^0, \dots, e_n^0$ является базисом.

Процесс построения базиса приведенным способом называется *ортонормализацией базиса*. $\odot$

Сопряженный оператор. Пусть заданы два евклидовых пространства Y и X . Оператор A^* , действующий из Y в X , называется *сопряженным* по отношению к оператору A , действующему из X в Y , если для любых векторов $x \in X$, $y \in Y$ выполняется равенство

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Заметим, что это определение справедливо для любых (не обязательно конечномерных) евклидовых пространств.

Т е о р е м а 2. Для всякого линейного оператора $A: E^n \rightarrow E^m$ существует сопряженный оператор и притом только один. Если в пространствах E^m и E^n выбраны ортонормированные базисы $\{e_1^0, \dots, e_m^0\}$ и $\{f_1^0, \dots, f_n^0\}$ и оператор A записывается с помощью матрицы A в этих базисах, то сопряженный оператор будет записываться с помощью транспонированной матрицы A' .

Доказательство. То, что сопряженный оператор существует и записывается с помощью транспонированной матрицы, следует из соотношения

$$\langle y, Ax \rangle = y'Ax = (A'y)'x = \langle A'y, x \rangle,$$

справедливого для любой вещественной $(n \times m)$ -матрицы A и любых векторов $x \in E^n$, $y \in E^m$.

Единственность сопряженного оператора получается сразу, если предположить противное. $\odot$

Рассмотрим примеры сопряженных операторов в трех пространствах со скалярным произведением:

1. В E^n согласно теореме 2 сопряженному оператору соответствует транспонированная матрица исходного оператора.

2. Пусть $B(t)$ — $(n \times m)$ -матрица функций, непрерывных на $[t_0, t_1]$, и $u(t)$ — элемент пространства $C^m[t_0, t_1]$, тогда

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt$$

есть линейный оператор, действующий из пространства $C^m[t_0, t_1]$ в E^n .

Непосредственное вычисление показывает, что сопряженный оператор $L^*(x)$ имеет вид

$$L^*(x) = B'(t), \text{ так что } u(t) = B'(t)x.$$

3. Пусть A и X — матрицы $(n \times n)$. Тогда $L(X) = A'X + XA$ есть линейный оператор, действующий в $E^{n \times n}$. Нетрудно показать, что сопряженный оператор $L^*(X)$ имеет вид

$$L^*(Y) = AY + YA.$$

Самосопряженные операторы. Линейный оператор в E^n , совпадающий со своим сопряженным, называется *самосопряженным* оператором. Согласно теореме 2 симметричному оператору в ортономированном базисе соответствует симметрическая матрица.

Симметрическая матрица обладает рядом замечательных свойств, часто используемых в дальнейшем.

Теорема 3. Все собственные значения симметрической матрицы вещественны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть λ — собственное число матрицы A , вообще говоря, комплексное, и пусть x — собственный вектор, соответствующий λ , тоже, вообще говоря, комплексный. Умножим i -ю строку системы уравнений $[A - \lambda E]x = 0$ на число $\bar{x}_i$, комплексно сопряженное i -й компоненте вектора x , и сложим все строки этой системы уравнений. Воспользовавшись далее симметричностью матрицы A , получим равенство

$$a_{11}x_1\bar{x}_1 + a_{12}(x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2x_1) + \dots + a_{ij}(x_j\bar{x}_i + x_i\bar{x}_j) + \dots \\ \dots + a_{nn}x_n\bar{x}_n = \lambda_0(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n).$$

Левая часть этого равенства — вещественное число, коэффициент при λ_0 справа — тоже вещественное число, причем не равное нулю, следовательно, λ_0 — вещественное число. $\odot$

Ясно, что вещественному собственному числу λ_0 симметрической матрицы A соответствует вещественный собственный вектор, координаты которого определяем, решая систему линейных уравнений $[A - \lambda_0 E]x = 0$.

Чтобы пойти дальше, введем ряд вспомогательных понятий.

Пусть R является подпространством в E^n . Совокупность всех элементов $z \in E^n$, ортогональных ко всем элементам из R , называется *ортогональным дополнением* к подпространству R . Обозначим это ортогональное дополнение через Q .

Предложение 2. Q является подпространством в E^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через r элемент из подпространства R , а через z — любой элемент ортогонального дополнения Q . Если $\langle z, r \rangle = 0$, то $\langle \lambda z, r \rangle = 0$. Далее, если $\langle z_1, r \rangle = 0$ и $\langle z_2, r \rangle = 0$, то и $\langle z_1 + z_2, r \rangle = 0$. Отсюда следует, что при $z_1 \in Q$ и $z_2 \in Q$ имеет место $z_1 + z_2 \in Q$. $\odot$

Предложение 3. Пусть R_k — k -мерное подпространство в пространстве E^n . Тогда размерность его ортогонального дополнения Q равна $n - k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем ортонормированный базис в E^n $\{e_1^0, \dots, e_n^0\}$ и пусть $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ — некоторый базис в R_k . Очевидно, что $z \in Q$ тогда и только тогда, когда $\langle z, f_1 \rangle = 0$, $\langle z, f_2 \rangle = 0 \dots$

Q имеет ортонормированный базис $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ собственных векторов. Добавив к этому базису нормированный вектор x_n^0 , мы получим ортонормированный базис векторов во всем пространстве E^n . $\odot$

Пусть A — произвольная симметрическая вещественная $(n \times n)$ -матрица. Всегда можно считать, что в некотором ортонормированном базисе она описывает некоторое преобразование A . Пусть $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ — ортонормированный базис из собственных векторов преобразования A . Согласно доказанной теореме матрицу A можно привести с помощью преобразования подобия к диагональному виду. Обозначим через U соответствующую матрицу преобразования. Тогда

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A , причем каждое собственное значение выписано столько раз, какова его кратность. Заметим, что матрица U обладает одной важной особенностью. По определению в столбцах этой матрицы стоят координаты векторов базиса $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ по базису $\{e_1^0, \dots, e_n^0\}$. Так как оба базиса ортонормированы, то

$$UU' = E.$$

Матрицы, удовлетворяющие этому условию, называются *ортогональными матрицами*. Пусть U^{-1} — обратная матрица для ортогональной матрицы U . Тогда в силу условия $UU' = E$ имеем $U^{-1} = U'$ для всякой ортогональной матрицы U .

Результат теоремы 4 используем для доказательства простого, но важного для нас факта.

Т е о р е м а 5. *Линейное пространство R^n представимо в виде прямой суммы области значений и ядра любого самосопряженного линейного оператора, или, что то же самое, всякой вещественной симметрической матрицы A . Символически это можно записать так:*

$$R^n = \text{range } A \oplus \ker A.$$

Доказательство. Пусть симметрическая вещественная матрица A имеет ранг r . Тогда в области значений матрицы A согласно теореме 3 существует базис из r собственных векторов $\{f_1, \dots, f_r\}$. Выберем теперь какой-либо базис $\{e_1, \dots, e_{n-r}\}$ в ядре матрицы A . Покажем, что если x принадлежит области значений матрицы A , то ни одна из его ненулевых компонент не лежит в ядре матрицы A . Пусть $x \in \text{range } A$ и $x = x_1 f_1 + \dots + x_r f_r + x_{r+1} e_1 + \dots + x_{n-r+1} e_{n-r}$ и пусть одновременно $Ax = 0$. Тогда

$$Ax = A(x_1 f_1 + \dots + x_r f_r + x_{r+1} e_1 + \dots + x_{n-r+1} e_{n-r}) = x_1 A f_1 + \dots + x_r A f_r + x_{r+1} A e_1 + \dots + x_{n-r+1} A e_{n-r} = x_1 \lambda_1 f_1 + \dots + x_r \lambda_r f_r,$$

где $s \leq r$, причем все числа $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, значит, все числа $x_1, \dots, x_s$ суть нули, так как в противном случае мы имели бы нетривиальную линейную зависимость векторов $f_1, \dots, f_r$. Значит, ни один из ненулевых векторов, принадлежащих области значений A , не содержится в ядре A . $\odot$

Требование симметричности матрицы A существенно. Для несимметрической матрицы это утверждение уже неверно, хотя сумма размерности области значений и ядра матрицы по-прежнему равна размерности пространства n .

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

вектор $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ лежит в ядре матрицы A , так как $Ax = 0$. Одновременно этот вектор лежит в области значений этой матрицы, так как, например, при $y' = [1, 1]$ имеем $Ay = x$.

Линейные уравнения. Каждую систему из n линейных уравнений с n неизвестными можно рассматривать как одно уравнение вида $Ax = b$ в n -мерном евклидовом пространстве E^n , где b — заданный вектор, A — матрица $n \times n$, x — искомое решение. Так как сопряженное линейное преобразование в E^n задается матрицей A' , то уравнение $A'y = b$ называют *сопряженным* уравнением.

В евклидовом пространстве основные результаты относительно разрешимости уравнения $Ax = b$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6. Чтобы уравнение $Ax = b$ было разрешимо при любом векторе b , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий: а) однородное уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение, б) сопряженное уравнение $A'y = c$ разрешимо при любом c .

Если уравнение $Ax = b$ не разрешимо при любом b , то оно имеет решение для тех и только для тех векторов b , которые удовлетворяют равенству $\langle b, y^* \rangle = 0$, где y^* — любое решение однородного сопряженного уравнения, или, другими словами, решение существует только для векторов b , ортогональных всем решениям однородного сопряженного уравнения. $\odot$

Для доказательства теоремы, которое предлагается провести читателю, достаточно воспользоваться результатами § 4, сформулировав их на языке линейных операторов.

Матрица Грама. Пусть в евклидовом пространстве, конечномерном или бесконечномерном, задана система векторов $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$. Матрица, составленная из попарных скалярных произведений этих векторов, которая имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \dots & \langle f_1, f_n \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \dots & \langle f_2, f_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle f_n, f_1 \rangle & \langle f_n, f_2 \rangle & \dots & \langle f_n, f_n \rangle \end{bmatrix},$$

называется *матрицей Грама* этой системы векторов. Определитель этой матрицы называется *определителем Грама*. В силу коммутативности скалярного умножения матрица Грама удовлетворяет условию $G = G'$ и, следовательно, является всегда симметрической матрицей.

Если $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ — базис пространства E^n , то скалярное произведение двух векторов x и y , имеющих в этом базисе координатные столбцы $x' = [x_1, \dots, x_n]$, $y' = [y_1, \dots, y_n]$, можно записать в виде

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{i=1}^n y_i f_i \right\rangle.$$

Пользуясь свойствами 2, 3 скалярного произведения,

получим

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle f_i, f_j \rangle = x' \Gamma y.$$

Если базис $\{f\}$ ортонормирован, то $\Gamma = E$ и $\langle x, y \rangle = x'y$. Пусть в пространстве E^n заданы два базиса $\{e\}$ и $\{f\}$, связанных между собой матрицей перехода P . Рассмотрим элемент матрицы Грама базиса $\{f\}$

$$\langle f_i, f_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n P_{ik} e_k, \sum_{l=1}^n P_{jl} e_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^n P_{ik} P_{jl} \langle e_k, e_l \rangle.$$

Совокупность этих равенств при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$ равносильна матричному равенству

$$\Gamma_f = P' \Gamma_e P.$$

Пусть базис $\{e\}$ ортонормирован. Тогда $\Gamma_e = E$ и $\Gamma_f = P'P$. Применяя теорему о детерминанте произведения матриц, получим

$$\det \Gamma_f = \det P' \det P = (\det P)^2 > 0.$$

Поскольку базис $\{f\}$ произволен, то доказано

Предложение 4. *Детерминант матрицы Грама любого базиса строго положителен. $\odot$*

Это утверждение может быть усилено следующим образом.

Теорема 7. *Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ — произвольные векторы в евклидовом пространстве. Тогда детерминант матрицы Грама этих векторов положителен, если векторы линейно независимы, и равен нулю, если они линейно зависимы. Отрицательным определитель Грама никогда не бывает.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из предложения 4, так как, если векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно независимы, то их можно рассматривать как базис в своей линейной оболочке (другими словами, в подпространстве, натянутом на векторы $x_1, \dots, x_k$). Если же векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно зависимы, то выполнено равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$, и не все α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) суть нули. Умножая это равенство скалярно на каждый из векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$,

Если для любого $x \in R^n$ выполняется неравенство

$$k(x) = x'Ax \geq 0,$$

то такая форма называется *неотрицательно определенной*, или *положительно полуопределенной*. Аналогично определяют *отрицательно определенную* и *неположительно определенную* квадратичные формы. $\odot$

Поскольку квадратичная форма полностью определяется заданием матрицы A , то говорят также о *положительно определенной матрице A* , *неотрицательно определенной матрице* и т. д.

Приведем без доказательства критерий положительной определенности квадратичных форм.

Т е о р е м а 8 (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма $x'Ax$ была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были положительны, т. е. чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad \odot$$

Для оценок значений квадратичной формы часто пользуются следующим результатом.

Т е о р е м а 9. Если A — вещественная симметрическая матрица, а $\lambda^-(A)$ и $\lambda^+(A)$ — ее минимальное и максимальное собственные значения соответственно, то для всех $x \in R^n$ имеет место неравенство

$$\lambda^-(A) x'x = \lambda^-(A) \|x\|^2 \leq x'Ax \leq \lambda^+(A) \|x\|^2 = \lambda^+(A) x'x$$

и существуют значения x такие, что равенства слева и справа достигаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу поиска экстремума функции $f(x) = x'Ax (x'x)^{-1}$ для $x \neq 0$. Необходимое условие экстремума состоит в равенстве нулю частных производных по компонентам вектора x . Дифференцирование $f(x)$ дает

$$Ax - \mu(x)x = 0, \quad \mu(x) = x'Ax (x'x)^{-1}.$$

Так как μ — скаляр, то необходимое условие может быть выполнено лишь в том случае, когда μ является собственным значением матрицы A , а x — соответствующим этому собственному значению собственным вектором. Поскольку A — симметрическая матрица, то все ее собственные значения вещественны и среди них найдутся максимальное $\lambda^+(A)$ и минимальное $\lambda^-(A)$ собственные значения. Пользуясь определением μ , мы видим, что равенства в условии теоремы выполняются. $\odot$

Задачи. 1. Покажите, что если A — треугольная матрица, то обратная матрица A^{-1} — тоже треугольная и на ее диагонали стоят величины, обратные собственным числам матрицы A .

2. Докажите, что если A — положительно определенная матрица, то выражение $x'Ay$, где x, y — два любых вектора в R^n , удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

3. Если A и B — квадратные матрицы, то неравенство $A > B$ понимают обычно в том смысле, что матрица $A - B$ положительно определена. Пусть A и B — положительно определенные симметрические матрицы. Покажите, что $A - B > 0$ тогда и только тогда, когда $B^{-1} - A^{-1} > 0$.

4. Постройте пример, показывающий, что если $A - B > 0$ (A и B — положительно определенные симметрические матрицы), то не обязательно $A^2 - B^2 > 0$.

5. Проверьте равенство

$$x'A^{-1}x = -\det \begin{bmatrix} 0 & x' \\ x & A \end{bmatrix}.$$

6. Пусть A и B — симметрические положительно определенные матрицы. Покажите, что если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A , записанные в убывающем порядке, и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — собственные числа матрицы $A + B$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$, то $\beta_i - \lambda_i \geq 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

7. Пусть A — неотрицательно определенная матрица. Покажите, что $x'Ax$ равно нулю тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. (y и z — любые векторы. Рассмотрите $(x + \lambda y)'A(x + \lambda y)$ для $-\infty < \lambda < +\infty$, $y'Ay = 0$ и $Ay \neq 0$.)

8. Докажите, что уравнение $Ax = b$, где A — матрица $(n \times m)$, разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда уравнение $A'x = 0$ имеет лишь тривиальное решение.

Г Л А В А II

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Материал этой главы является той основой, на которой построено изложение теории линейных динамических систем. Нас будет интересовать главным образом структура решений и в значительно меньшей степени техника интегрирования конкретных уравнений. В связи с этим основной темой будет исследование свойств переходной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений.

§ 9. Однородная система. Существование и единственность решения

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (ЛО)$$

Здесь $A(t)$ — матрица $n \times n$, составленная из непрерывных функций. На два основных вопроса требуется получить ответ в первую очередь: 1) существует ли решение этого уравнения, проходящее через заданную точку x_0 в момент времени t_0 ? 2) если такое решение существует, то является ли оно единственным? Ответы на оба вопроса положительны.

Поскольку вопрос существования связан с конструктивным построением решения, которое (построение) нельзя реализовать, вообще говоря, с помощью элементарных функций, мы начнем со второго, более простого вопроса.

Единственность решения. Итак, предположим, что решение уравнения (ЛО) существует. Тогда справедлива следующая

Т е о р е м а 1 (о единственности решения). *Если $A(t)$ — матрица $n \times n$, элементы которой непрерывны*

функции времени, определенные на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то имеется единственное решение системы (ЛЮ), которое определено на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ и принимает значение x_0 при $t = t_0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть x_1 и x_2 — два различных решения уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ и $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$. Пусть $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$, тогда $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$ и $z(t_0) = 0$. Учитывая скалярное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2] &= \frac{d}{dt} [z'z] = 2z'(t)A(t)z(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2z_i(t)a_{ij}(t)z_j(t) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|z_i(t)\|^2 \max_{ij} |a_{ij}(t)| \|z_j(t)\| \leq \\ &\leq \|z(t)\|^2 2n^2 \max_{ij} |a_{ij}(t)| \end{aligned}$$

и обозначив через $\eta(t)$ коэффициент при $\|z(t)\|^2$ в последнем выражении, можем записать

$$\frac{d}{dt} (\|z(t)\|^2) - \eta(t) \|z(t)\|^2 \leq 0.$$

Если это неравенство умножить на положительный коэффициент

$$\rho(t) = \exp \left[- \int_{t_0}^t \eta(\sigma) d\sigma \right],$$

то результат можно выразить так:

$$\frac{d}{dt} [\rho(t) \|z(t)\|^2] \leq 0.$$

Интегрируя, получаем для всех $t_0 \leq t \leq t_1$ неравенство

$$\rho(t) \|z(t)\|^2 - \rho(t_0) \|z(t_0)\|^2 \leq 0,$$

или, так как $z(t_0) = 0$, $\rho(t) \|z(t)\|^2 \leq 0$. Поскольку коэффициент $\rho(t)$ положителен, то, значит, $z(t) = 0$. Отсюда $x_1(t) = x_2(t)$ для всех $t_0 \leq t \leq t_1$. $\odot$

Конечномерность пространства решений. Рассмотрим теперь свойства множества решений линейного диффе-

ренциального уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Сначала заметим, что если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями этого дифференциального уравнения, то их линейная комбинация тоже является решением. Действительно, если $\dot{x}_1(t) = A(t)x_1(t)$ и $\dot{x}_2(t) = A(t)x_2(t)$, то $\alpha_1\dot{x}_1(t) + \alpha_2\dot{x}_2(t) = \alpha_1A(t)x_1(t) + \alpha_2A(t)x_2(t) = A(t)(\alpha_1x_1(t) + \alpha_2x_2(t))$, и функция $z(t) = \alpha_1x_1(t) + \alpha_2x_2(t)$ является решением. Это справедливо, конечно, и для линейных комбинаций n решений $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Таким образом, для возможных решений уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ выполнены аксиомы линейного пространства. Это пространство напоминает нам пространство $C^n[t_0, t_1]$, составленное из n -мерных вектор-функций, непрерывных при $t_0 \leq t \leq t_1$. Вообще говоря, пространство $C^n[t_0, t_1]$ является бесконечномерным. Множество решений линейного уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ оказывается конечномерным (именно n -мерным) линейным пространством. Этот факт следует из доказанной выше единственности решения дифференциального уравнения. Согласно доказанной теореме каждому вектору начальных условий соответствует одно и только одно решение дифференциального уравнения, и тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между пространством R^n и множеством решений уравнения (ЛО).

Теорема 2. *Множество всех решений уравнения (ЛО) образует n -мерное векторное пространство над полем вещественных чисел.*

Доказательство. Аксиомы линейного пространства легко проверяются непосредственно. Остановимся на доказательстве конечномерности пространства решений. Попутно получим способ построения базиса в этом пространстве.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в R^n и пусть вектор $x_i(t)$ является решением (ЛО) при начальном условии $x_i(t_0) = e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Покажем, что набор решений $x_i(t)$ является базисом пространства решений. Действительно, векторы $x_i(t)$ линейно независимы, так как в противном случае нашлись бы числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все являющиеся нулями и такие, что $\alpha_1x_1(t) + \dots + \alpha_nx_n(t) = 0$ при всех $t_0 \leq t \leq t_1$, в частности, при $t = t_0$ имело бы место равенство

$$\alpha_1x_1(t_0) + \dots + \alpha_nx_n(t_0) = \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_ne_n = 0,$$

которое противоречит линейной независимости векторов $\{e_i\}$.

Пусть теперь $x(t)$ — решение уравнения (ЛО) и пусть $x(t_0) = e$, где e — какой-либо ненулевой вектор в $\mathbb{R}^n$. Так как $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис, то $e = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ и α_i — не все нули. Но тогда $\alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$ является решением уравнения (ЛО) с начальным условием e . Так как решение при фиксированном начальном условии единственно, то $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$ и система функций $\{x_i(t)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) действительно является базисом в пространстве решений. $\odot$

Фундаментальная матрица. Пользуясь доказанным свойством множества решений уравнения (ЛО), введем следующее важное.

О п р е д е л е н и е 1. Матрица $X(t)$ размеров $(n \times n)$ называется *фундаментальной матрицей* системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ тогда и только тогда, когда в ее столбцах стоят n линейно независимых решений этой системы. $\odot$

Определитель любой фундаментальной матрицы называют *определителем Вронского*. Согласно теореме 2 определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке интервала $t_0 \leq t \leq t_1$, и, следовательно, фундаментальная матрица при любом значении t является неособенной матрицей. Поскольку каждый столбец этой матрицы удовлетворяет дифференциальному уравнению (ЛО), то, значит, сама матрица $X(t)$ удовлетворяет дифференциальному матричному уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t),$$

с начальным условием $X(t_0) = X_0$, где X_0 — неособенная вещественная матрица. Справедливо и обратное утверждение.

Если $X(t)$ удовлетворяет этому матричному уравнению и является неособенной матрицей при всех $t_0 \leq t \leq t_1$, то все столбцы ее линейно независимы и, следовательно, $X(t)$ — фундаментальная матрица. Таким образом, доказано

П р е д л о ж е н и е 1. Матрица $X(t)$ является фундаментальной матрицей уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ тогда и только тогда, когда $X(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ при

начальном условии $X(t_0) = X_0$, где X_0 — неособенная вещественная матрица. $\odot$

Это свойство можно принять в качестве определения фундаментальной матрицы.

Переходная матрица. Поскольку определитель фундаментальной матрицы $X(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке, то при любом фиксированном t_0 существует обратная матрица $X^{-1}(t_0)$ и имеет смысл

О п р е д е л е н и е 2. Если $X(t)$ — какая-либо фундаментальная матрица уравнения (ЛО), то

$$\Phi(t, t_0) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0)$$

для всех $t_0 \leq t$, $t_0 \leq t_1$ называется *переходной матрицей* уравнения (ЛО), или *переходной матрицей*, соответствующей матрице $A(t)$. $\odot$

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства переходной матрицы:

1. $\Phi(t_0, t_0) = X(t_0) X^{-1}(t_0) = E$.
2. $|\Phi(t, t_0)| \neq 0$ ни при каких $t_0 \leq t$, $t_0 \leq t_1$.
3. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$. Действительно,

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = [X(t) X^{-1}(t_0)]^{-1} = [X^{-1}(t_0)]^{-1} [X(t)]^{-1} = X(t_0) X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t).$$

Заметим, что переходная матрица — это такая фундаментальная матрица, которая удовлетворяет начальному условию $X(t_0) = E$. Поэтому согласно предложению 1 переходную матрицу можно определить как решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Рассмотрим один из способов построения переходной матрицы. Напомним, что обратную матрицу можно построить, если решить n систем линейных уравнений

$$Az = b_1, \quad Az = b_2, \dots, Az = b_n,$$

где $b'_1 = [1, 0, \dots, 0]$, $b'_2 = [0, 1, \dots, 0]$, $\dots$, $b'_n = [0, 0, \dots, 1]$, и составить из полученных столбцов решений $z_1, z_2, \dots, z_n$ матрицу $[z_1, z_2, \dots, z_n] = Z$ (см. § 3). Тогда $AZ = E$ и, значит, $Z = A^{-1}$. Точно таким же способом можно построить переходную матрицу для уравнения (ЛО). Предположим, что решение этого уравнения найдено для следующих начальных условий

в момент t_0 :

$$\begin{aligned} x_1'(t_0) &= [1, 0, \dots, 0], \quad x_2'(t_0) = [0, 1, \dots, 0], \dots, \quad x_n'(t_0) = \\ &= [0, 0, \dots, 1]. \end{aligned}$$

Обозначим полученные решения через $\Phi_i(t, t_0)$ и составим матрицу

$$\Phi(t, t_0) = [\Phi_1(t, t_0), \Phi_2(t, t_0), \dots, \Phi_n(t, t_0)].$$

Нетрудно видеть, что полученная матрица является переходной матрицей, так как в ее столбцах стоят линейно независимые решения и $\Phi(t_0, t_0) = E$. Продолжим аналогию с линейным уравнением $Az = b$. Если A^{-1} — обратная матрица для A , то решение этого уравнения при любом векторе b имеет вид $z = A^{-1}b$. Нетрудно убедиться, что если x_0 — произвольный вектор начальных условий, то вектор $\Phi(t, t_0)x_0$ является решением уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ и, значит, любое решение однородного уравнения выражается через переходную матрицу. Поэтому, изучая свойства переходной матрицы, мы тем самым изучим структурные свойства решений линейного однородного уравнения. В дальнейшем будет показано, что решение неоднородного уравнения тоже можно легко получить, зная переходную матрицу.

Теорема о существовании решения. Заметим, что существование решения уравнения (ЛО) эквивалентно существованию переходной матрицы. Решение этого уравнения не выражается, вообще говоря, в элементарных функциях. Это относится, например, к такому простому на первый взгляд уравнению

$$\dot{x}(t) + (a + b \sin t)x(t) = 0.$$

Поэтому, чтобы доказать существование решения (ЛО), нам придется построить это решение с помощью некоторой итерационной процедуры и доказать ее сходимость. При этом нам потребуются доказывать сходимость последовательности временных матричных функций. Напомним необходимые понятия.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность скалярных функций времени $x_1(t), x_2(t), \dots$, определенных при $t_0 \leq t \leq t_1$, называется *сходящейся*, если существует функция $x(t)$, определенная при $t_0 \leq t \leq t_1$, такая, что

при любом фиксированном t из указанного отрезка числовая последовательность $\{x_i(t)\}$ сходится к $x(t)$. $\odot$

О п р е д е л е н и е 4. Последовательность функций $\{x_i(t)\}$ *сходится равномерно* при $t_0 \leq t \leq t_1$, если существует функция $x(t)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $i > N$ выполняется неравенство

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |x_i(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е 5. Ряд скалярных функций времени, определенных на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, является *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится. Этот ряд называется *равномерно сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если он остается сходящимся в том случае, когда все его члены заменяются абсолютными величинами. $\odot$

Обозначим через $\mathfrak{A}_{ij}(M)$ ij -й элемент матрицы M .

О п р е д е л е н и е 6. Последовательность матриц $M_1, M_2, M_3, \dots$, элементы которых есть функции времени, *сходится равномерно* на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, если каждая скалярная последовательность $\mathfrak{A}_{ij}(M_1), \mathfrak{A}_{ij}(M_2), \dots, \mathfrak{A}_{ij}(M_n), \dots$ сходится равномерно. $\odot$

Т е о р е м а 3 (о существовании решения). Пусть $A(t)$ — квадратная матрица, элементы которой — непрерывные функции времени, заданные на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$. Ряд, составленный из матриц M_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, заданных рекурсивно равенствами

$$M_0 = E, \quad M_k = \int_{t_0}^t A(\sigma) M_{k-1}(\sigma) d\sigma,$$

сходится равномерно на этом интервале. Если обозначить сумму этого ряда $\Phi(t, t_0)$, то для $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E,$$

и решение уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, проходящее в момент t_0 через точку x_0 , равно $\Phi(t, t_0)x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того чтобы доказать, что матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ сходится, необходимо доказать,

что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_{ij}(M_k)$ при всех $1 \leq i, j \leq n$.

Напомним, что ряд непрерывных скалярных функций $x_1(t) + x_2(t) + \dots$, определенных на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, сходится абсолютно и равномерно, если существует последовательность положительных констант c_i таких, что для любого $t_0 \leq t \leq t_1$ справедлива оценка $|x_i(t)| \leq c_i$, а ряд c_i сходится (критерий Вейерштрасса из анализа). Обозначим максимум элементов $A(t)$ через

$$\eta(t) = \max_{ij} |a_{ij}(t)|.$$

Пусть далее $\gamma(t)$ определена как интеграл от $\eta(t)$:

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t \eta(\sigma) d\sigma.$$

Если A и B — матрицы размеров $n \times n$, то имеет место очевидное неравенство

$$|\mathcal{O}_{ij}(AB)| \leq n \max_{ij} |\mathcal{O}_{ij}(A)| \cdot \max_{ij} |\mathcal{O}_{ij}(B)|.$$

Используя это неравенство, легко получим следующую оценку для всех i и j для матрицы M_k :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ij}[M_k(t, t_0)] &= \\ &= \mathcal{O}_{ij} \left[\int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) \dots \int_{t_0}^{\sigma_{k-1}} A(\sigma_k) d\sigma_k \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \right] = \\ &= \mathcal{O}_{ij} \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dots \int_{t_0}^{\sigma_{k-1}} A(\sigma_1) A(\sigma_2) \dots A(\sigma_k) d\sigma_k \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \right] \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \dots \int_{t_0}^{\sigma_{k-1}} n^{k-1} \eta(\sigma_1) \eta(\sigma_2) \dots \eta(\sigma_k) d\sigma_k \dots d\sigma_1 = \frac{n^{k-1} \gamma^k(t)}{k!}. \end{aligned}$$

Последнее равенство получено с помощью последовательного применения легко проверяемой формулы

$$\int_{t_0}^t \gamma^{k-1}(\sigma) \eta(\sigma) d\sigma = \frac{\gamma^k(t)}{k}.$$

Таким образом, каждый член ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_{ij} [M_k(t, t_0)],$$

при всех $1 \leq i, j \leq n$ не больше соответствующего члена ряда

$$1 + \gamma(t) + \frac{n\gamma^2(t)}{2!} + \frac{n^2\gamma^3(t)}{3!} + \dots$$

Однако этот ряд сходится, так как он может быть записан в виде

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left[1 + n\gamma(t) + \frac{n^2\gamma^2(t)}{2!} + \frac{n^3\gamma^3(t)}{3!} + \dots \right] - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \exp(n\gamma(t)).$$

Поэтому каждый элемент $\mathcal{D}_{ij}$ нашего матричного ряда тоже сходится, и, следовательно, ряд матриц M_k сходится равномерно и абсолютно. Обозначим сумму этого ряда через $\Phi(t, t_0)$ и вычислим производную по t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) &= \\ &= \frac{d}{dt} \left[E + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \right] = \\ &= A(t) \left[E + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \right] = \\ &= A(t) \Phi(t, t_0). \end{aligned}$$

Поскольку как дифференцируемый (первоначальный) ряд, так и ряд, получаемый почленным дифференцированием, сходятся равномерно, то дифференцирование законно, и мы видим, что $\Phi(t, t_0)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению, приведенному в условии теоремы. Остается только показать, что $\Phi(t, t_0) x(t_0)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Ясно, что $\Phi(t_0, t_0) x_0 = x_0$, поскольку $\Phi(t_0, t_0) = E$. Таким образом, предполагаемое решение удовлетворяет нужным начальным условиям. Дифференцирование по времени дает

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t, t_0) x_0] = \dot{\Phi}(t, t_0) x_0 = A(t) \Phi(t, t_0) x_0,$$

отсюда ясно, что $\Phi(t, t_0) x_0$, действительно, решение. ⊙

Ряд Пеано для переходной матрицы. Формулу

$$\Phi(t, t_0) =$$

$$= E + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots, \quad (\text{РП})$$

полученную при доказательстве теоремы 3, называют *рядом Пеано*. Эту формулу можно получить формально следующим образом. Пусть $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Это уравнение равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) x(\sigma_1) d\sigma_1.$$

Заменяя здесь $x(\sigma_1)$ суммой

$$x(\sigma_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) x(\sigma_2) d\sigma_2,$$

будем иметь

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) x(t_0) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) x(\sigma_2) d\sigma_2.$$

Повторяя эту процедуру неограниченное число раз, получим формальное представление решения в виде ряда Пеано.

Рассмотрим два простых следствия теоремы 3.

С л е д с т в и е 1. Если $A(t)$ — скаляр (матрица размером 1×1), то ряд Пеано можно просуммировать и

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\sigma) d\sigma \right].$$

С л е д с т в и е 2. Если A — постоянная матрица, то $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как постоянную A можно вынести за знак интеграла, то ряд Пеано в этом случае принимает вид

$$\Phi(t, t_0) = E + A \int_{t_0}^t d\sigma_1 + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots$$

После вычисления всех интегралов имеем

$$\Phi(t, t_0) = E + A(t - t_0) + A^2(t - t_0)^2/2! + \dots \\ \dots + A^n(t - t_0)^n/n! + \dots$$

Этот ряд по определению обозначают через $e^{A(t-t_0)}$, имея в виду его аналогию с рядом экспоненты.

Пример. Рассмотрим уравнение простого осциллятора $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$. Обозначая $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$: получим уравнения движения системы в матричном виде,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для этой системы удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{11}(t, t_0) & \dot{\Phi}_{12}(t, t_0) \\ \dot{\Phi}_{21}(t, t_0) & \dot{\Phi}_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix},$$

при начальном условии $\Phi(t_0, t_0) = E$.

Ряд для вычисления $\Phi(t, t_0)$ в этом примере легко суммируется потому, что A — постоянная и, кроме того, $A^i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} A$ для i нечетных и $A^i = (-1)^{\frac{i}{2}} E$ для $i \geq 2$ четных. Простое вычисление показывает, что

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t - t_0) & \sin(t - t_0) \\ -\sin(t - t_0) & \cos(t - t_0) \end{bmatrix}.$$

Задачи. 1. Найти переходную матрицу для

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Пусть A — постоянная матрица. Найдите переходную матрицу $\Phi_*(t, 0)$ для нестационарной линейной системы

$$\dot{x}(t) = f(t)Ax(t),$$

где $f(t)$ — непрерывная функция времени.

3. Найдите переходную матрицу для системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} & 2e^{-t} \\ 3e^{-t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

4. Пусть A — постоянная матрица размером 2×2 и пусть $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Известно, что если $x'(0) = [1, -3]$, то $x'(t) = [e^{-3t}, -3e^{-3t}]$, и если $x'(0) = [1, 1]$, то $x'(t) = [e^t, e^t]$. Определите переходную матрицу системы и матрицу A .

5. Пусть A — постоянная матрица 2×2 и пусть $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Известно, что если $x'(0) = [1, 1]$, то $x'(t) = [e^{-t}(2 \sin t + \cos t), e^{-t}(\cos t - 3 \sin t)]$, и если $x'(0) = [1, -2]$, то $x'(t) = [e^{-t}(\cos t - \sin t), -2 \cos t(e^{-t})]$. Определите переходную матрицу системы и матрицу A .

6. Покажите, что несингулярная квадратная матрица $\Phi(\cdot, \cdot)$, зависящая от двух аргументов и дифференцируемая по каждому из них, является переходной матрицей, если $\Phi(t_0, t_0) = E$ и матрица

$$\left\{ \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) \right\} \Phi(t, t_0)$$

зависит только от t .

7. Является ли множество решений уравнения $\dot{x}(t) = x(t) = 1$, $0 \leq t \leq \infty$, линейным векторным пространством?

§ 10. Свойства переходной матрицы. Формула Коши

Продолжим изучение свойств переходной матрицы.

Формула Остроградского — Лиувилля. Напомним следующее определение. Следом квадратной матрицы называется сумма ее диагональных элементов

$$\text{Sp}(A) = \text{след}(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

След матрицы $A(t)$ и определитель переходной матрицы связаны удивительной формулой.

Т е о р е м а 1. (Остроградского — Лиувилля). Если $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, то

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds \right], \quad (\text{ОЛ})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если обозначить через A_{ij} алгебраическое дополнение ij -го элемента матрицы Φ , то по свойству 8 определителя (см. § 3) для любого j справедливо равенство

$$\det \Phi = \sum_{i=1}^n A_{ij} \Phi_{ij}.$$

Так как A_{ij} по определению от Φ_{ij} не зависит, то

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} [\det \Phi] = A_{ij}.$$

Вычислим теперь полную производную по времени от $\det \Phi$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t, t_0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} \det \Phi(t, t_0) \right] \dot{\Phi}_{ij}(t, t_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{\Phi}_{ij}(t, t_0). \end{aligned}$$

Обозначим через $\Phi^*(t, t_0)$ присоединенную матрицу для матрицы $\Phi(t, t_0)$. Напомним, что для построения присоединенной матрицы необходимо каждый элемент исходной матрицы заменить его алгебраическим дополнением и полученную матрицу транспонировать. Основное свойство присоединенной матрицы выражается равенством (см. § 3)

$$\Phi^*(t, t_0) \cdot \Phi(t, t_0) = \det \Phi(t, t_0) \cdot E.$$

Воспользовавшись этим обозначением и замечая, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{\Phi}_{ij}(t, t_0) = \text{tr} [\Phi^*(t, t_0) \dot{\Phi}(t, t_0)],$$

получим

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t, t_0) = \text{tr} [\Phi^*(t, t_0) \dot{\Phi}(t, t_0)].$$

Вспомня, что $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0)$, $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t, t_0) &= \text{tr} [\Phi^*(t, t_0) A(t) \Phi(t, t_0)] = \\ &= \text{tr} [\Phi^*(t, t_0) \Phi(t, t_0) A(t)] = \text{tr} [\det \Phi(t, t_0) E A(t)] = \\ &= \det \Phi(t, t_0) \text{tr} [A(t)]. \end{aligned}$$

Интегрирование этого равенства с учетом условия $\Phi(t_0, t_0) = E$ дает формулу (ОЛ). ○

Правило композиции. Важное свойство переходной матрицы заключается в том, что она удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) \Phi(t_1, t_0). \quad (\text{ПК})$$

Это уравнение называют *правилом композиции* для переходной матрицы. Воспользуемся для доказательства этого правила определением переходной матрицы $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$. Непосредственная проверка дает

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = X(t)X^{-1}(t_1)X(t_1)X^{-1}(t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0).$$

Диаграммы, которые иллюстрируют альтернативные линейные преобразования, называются *коммутативными диаграммами*. Для правила композиции такая диаграмма приведена на рис. 10.1. Она свидетельствует о том,

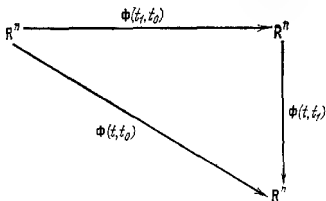


Рис. 10.1.

что из состояния x_0 можно перейти в состояние x_1 либо с помощью линейного преобразования $\Phi(t, t_0)$, либо последовательно применяя два линейных преобразования: сначала $\Phi(t_1, t_0)$, переводящее x_0 в некоторое промежуточное состояние x_1^* , и далее преобразование $\Phi(t, t_1)$, переводящее x_1^* в требуемое состояние x_1 . Мы и в дальнейшем будем пользоваться коммутативными диаграммами для иллюстрации формул подобного типа.

Преобразование координат. Если уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ имеет переходную матрицу $\Phi(t, t_0)$ и сделана невырожденная замена переменной $z(t) = P(t)x(t)$, $|P(t)| \neq 0$ при всех t , то как преобразуется переходная матрица?

Предположим, что $\dot{P}(t)$ и $P^{-1}(t)$ существуют, и проведем указанное преобразование переменных:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= P(t)\dot{x}(t) + \dot{P}(t)x(t) = [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]x(t) = \\ &= [P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)]z(t). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_A(t, t_0) x_0 = P^{-1}(t) z(t) = P^{-1}(t) \Phi_{[PAP^{-1}, \dot{P}P^{-1}]} z_0 = \\ &= P^{-1}(t) \Phi_{[PAP^{-1}, \dot{P}P^{-1}]} P(t_0) x_0. \end{aligned}$$

Нами доказана

Т е о р е м а 2. Если $P(t)$ дифференцируема и существует $P^{-1}(t)$, то

$$\Phi_A(t, t_0) = P^{-1}(t) \Phi_{[PAP^{-1}, \dot{P}P^{-1}]}(t, t_0) P(t_0). \odot$$

Как и в предыдущем случае, этот результат удобно представить в виде коммутативной диаграммы, приведенной на рис. 10.2.

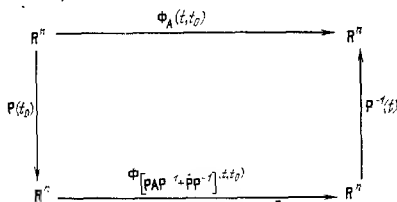


Рис. 10.2.

Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь решение неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t). \quad (\text{ЛН})$$

Снова полезно провести аналогию с линейными алгебраическими уравнениями. Вспомним, что общее решение уравнения $Ax = b$ состоит из двух частей: частного решения этого уравнения и элемента x , принадлежащего ядру матрицы A , т. е. удовлетворяющего однородному уравнению $Ax = 0$. Другими словами, оно является суммой частного решения x_1 и решения однородного уравнения x_2 . Перепишем уравнение (ЛН) в виде

$$[DE - A(t)]x(t) = f(t), \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Отличие от алгебраических уравнений состоит в необходимости вводить начальные условия. Эти начальные условия жестко фиксируют решение однородного уравнения, которое нам уже известно, $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. Остается найти частное решение неоднородного уравнения. Если $A = 0$, то имеем

$$\dot{x}(t) = f(t),$$

и, интегрируя, получим

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\sigma) d\sigma.$$

Преобразуем теперь уравнение (ЛН), введя замену переменной $z(t) = \Phi(t_0, t)x(t)$, где $\Phi(t_0, t)$ — переходная матрица для A . Это преобразование исключает зависимые переменные справа и дает

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0) f(t) = \Phi(t_0, t) f(t).$$

Отсюда сразу получим

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \sigma) f(\sigma) d\sigma$$

и далее

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \sigma) f(\sigma) d\sigma \right] = \\ &= \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Полученное равенство называют *формулой Коши* или *формулой вариации постоянных*. Прделанные вычисления позволяют сформулировать следующее утверждение.

Т е о р е м а 3 (формула Коши). Если $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица для $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, то единственное решение уравнения (ЛН) при начальном условии $x(t_0) = x_0$ дается формулой

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma. \quad (\Phi K)$$

В стационарном случае $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ и эта формула имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\sigma)}f(\sigma) d\sigma. \quad \odot$$

Заметим, что единственность решения (ФК) доказывается немедленно. Если $x(t)$ и $y(t)$ — два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, то

$$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) = A(t)[x(t) - y(t)]; \quad x(t_0) - y(t_0) = 0.$$

А мы доказывали уже (теорема 1 § 9), что в этом случае $x(t) - y(t) = 0$ и, значит, $x(t) = y(t)$.

Пример 1. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(0) = x_0,$$

которое можно представить в виде системы двух уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t).$$

Вычисление переходной матрицы немедленно дает

$$\Phi(t, 0) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу Коши, получим общее решение системы

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + tx_2(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(\sigma) d\sigma,$$

или

$$x(t) = x(0) + tx(0) + \int_0^t (t-\sigma) f(\sigma) d\sigma. \quad \odot$$

Сопряженное уравнение. При исследовании линейных преобразований в евклидовых пространствах мы определили сопряженное преобразование, связанное с данным преобразованием как преобразование, которое обеспечивает равенство скалярных произведений $\langle y, L(x) \rangle$ и $\langle x, L^*(y) \rangle$ (см. § 8). Определение сопряженного уравнения для линейного дифференциального уравнения

основано на тех же соображениях. Пусть линейное однородное дифференциальное уравнение определено в евклидовом пространстве. Линейное однородное дифференциальное уравнение для вектора $\mathbf{p}(t)$, принадлежащего тому же евклидову пространству, является уравнением, сопряженным уравнению для $\mathbf{x}(t)$, если при любых начальных значениях скалярное произведение решения $\mathbf{x}(t)$ и решения $\mathbf{p}(t)$ постоянно.

Т е о р е м а 4. *Сопряженное уравнение, соответствующее уравнению $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, имеет вид*

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -A'(t)\mathbf{p}(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор $\mathbf{p}(t)$ является сопряженным вектору $\mathbf{x}(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \text{const} \text{ или } \mathbf{p}'\mathbf{x} = \text{const}.$$

Дифференцируя скалярное произведение $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{p}'(t)\mathbf{x}(t)] &= \dot{\mathbf{p}}'(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}'(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = \\ &= [\mathbf{p}'(t)A(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}'(t)A(t)\mathbf{x}(t)] = \\ &= -\mathbf{p}'(t)[A(t) - A'(t)]\mathbf{x}(t) = 0. \quad \odot \end{aligned}$$

Вариационные задачи, общая теория двухточечной граничной задачи, существование и единственность периодических решений — исследование всех этих вопросов связано с исследованием свойств сопряженных уравнений.

Основное свойство сопряженного уравнения заключается в том, что оно представляет решение исходного дифференциального уравнения в обратном времени. Это показывает следующая

Т е о р е м а 5. *Если $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица для $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, тогда $\Phi'(t_0, t)$ будет переходной матрицей для сопряженной системы $\dot{\mathbf{p}}(t) = -A'(t)\mathbf{p}(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем равенство $\Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t, t_0) = E$ по времени:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} [\Phi^{-1}(t, t_0)\Phi(t, t_0)] = \\ &= \left[\frac{d}{dt} \Phi^{-1}(t, t_0) \right] \Phi(t, t_0) + \Phi^{-1}(t, t_0) \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = \\ &= \left[\frac{d}{dt} \{\Phi^{-1}(t, t_0)\} + \Phi^{-1}(t, t_0) A(t) \right] \Phi(t, t_0). \end{aligned}$$

Поскольку матрица $\Phi(t, t_0)$ — неособенная, имеем

$$\frac{d}{dt} \Phi^{-1}(t, t_0) = -\Phi^{-1}(t, t_0) A(t),$$

или

$$\frac{d}{dt} \{\Phi^{-1}(t, t_0)\}' = -A'(t) \{\Phi^{-1}(t, t_0)\}',$$

Используя свойство переходной матрицы $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$, получим

$$\frac{d}{dt} \{\Phi(t_0, t)\}' = -A'(t) \Phi'(t_0, t). \odot$$

Дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ называется *самосопряженным*, если для всех t имеет место равенство $A(t) = -A'(t)$. Такие системы очень важны при изучении проблем механики. Гармонический осциллятор — наиболее простой пример самосопряженного уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица самосопряженной системы обладает замечательным свойством. Она является ортогональной матрицей.

Теорема 6. Если Φ — переходная матрица самосопряженной системы, то $\Phi'(t, t_0) \Phi(t, t_0) = E$ для всех t и t_0 .

Доказательство. Чтобы проверить ортогональность $\Phi'(t, t_0)$ в случае, когда система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ — самосопряженная, заметим, что поскольку $A(t) = -A'(t)$, то

$$\frac{d}{dt} [\Phi'(t, t_0) \Phi(t, t_0)] = \Phi'(t, t_0) [A'(t) + A(t)] \Phi(t, t_0) = 0.$$

Значит, $\Phi'(t, t_0) \Phi(t, t_0) = \text{const}$, но по определению переходной матрицы $\Phi'(t_0, t_0) = E$, следовательно,

$$\Phi'(t_0, t_0) \Phi(t_0, t_0) = E,$$

и требуемый результат получается сразу. $\odot$

Стационарный случай. В случае, когда A — постоянная матрица, бесконечный ряд для переходной матрицы

принимает вид

$$\Phi(t, t_0) = E + A(t - t_0) + A^2(t - t_0)^2/2! + \dots = e^{A(t-t_0)}.$$

Из следствия 2 теоремы существования следует, что этот ряд абсолютно сходится для любой вещественной квадратной матрицы A .

Заметим, что несмотря на внешнюю простоту выражения для переходной матрицы в стационарной системе, вычисление функции e^{At} может оказаться сложной задачей.

Рассмотрим ряд полезных свойств матричной экспоненты.

1. Если A — диагональная матрица,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{то} \quad e^A = \begin{bmatrix} e^{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Это свойство очевидно следует из определения e^A .

2. Если P — какая-то неособенная квадратная матрица, то

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP.$$

Действительно, по определению имеем

$$e^{P^{-1}AP} = E + P^{-1}AP + [P^{-1}AP]^2/2! + \dots = P^{-1}[E + A + A^2/2! + \dots]P.$$

3. Справедливо правило

$$e^{At} \cdot e^{As} = e^{A(t+s)}.$$

Тем не менее, вообще говоря, неверно, что $e^A e^B = e^{A+B}$. Это равенство выполняется лишь в том случае, если матрицы A и B перестановочны, т. е. $AB = BA$.

$$4. e^{A^T t} = [e^{At}]'.$$

Это сразу следует из доказанных в § 2 формул

$$(A + B)' = (A' + B'), \quad (A')^n = (A^n)'.$$

5. Дифференцирование матричной экспоненты по времени осуществляется по обычному правилу дифференцирования экспоненты

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right) = \\ &= A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = A e^{At} = e^{At} A. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что квадратная матрица коммутирует с любым своим многочленом.

Перечень свойств переходной матрицы. Здесь будет приведена сводка всех доказанных свойств переходной матрицы. О значении этого понятия в различных вопросах теории линейных систем свидетельствует число терминов, используемых для обозначения матрицы $\Phi(t, t_0)$. Вот некоторые из них: матрицант [13], нормированная фундаментальная матрица [38], матрица Грина, матрица Коши [19], нормированная интегральная матрица, резольвентное ядро [25], фундаментальная матрица [27].

З а м е ч а н и е. Выше все элементы матрицы $A(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ были заданы и непрерывны в отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$. Часто, однако, приходится иметь дело с областью определения в виде открытого интервала $t_0 < t < t_1$, причем чаще всего этот интервал может быть не ограничен с одной стороны или с обеих сторон. Если интервал $t_0 < t < t_1$ ограничен, то доказанные теоремы будут верны для любого конечного отрезка $t_0 + \varepsilon \leq t \leq t_1 - \varepsilon$, где ε — как угодно малое положительное число, и значит, в этом смысле они будут справедливы для всего интервала $t_0 < t < t_1$. В случае бесконечного интервала $-\infty < t < +\infty$, теоремы § 10 справедливы для любого конечного интервала $-M \leq t \leq M$, как бы велико ни было число M , и в этом смысле они будут справедливы для всего интервала $(-\infty, +\infty)$. Все перечисляемые ниже свойства переходной матрицы выполняются при любых t_0, t , принадлежащих области определения матрицы $A(t)$. $\odot$

Итак, для уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$ существует и единственная матрица $\Phi(t, t_0)$ такая, что решение можно записать в виде $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. Эта матрица обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(t_0, t_0) = E$ при любом t_0 .
2. $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$ при любых t, t_1, t_0 .
3. $\det \Phi(t, t_0) \neq 0$ при любых (t, t_0) .
4. $\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$, где $X(t)$ — любая фундаментальная матрица уравнения (ЛО).
5. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$.
6. Матрица $\Phi(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

7. Матрица $\Phi'(t_0, t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\Phi'(t_0, t) = -A'(t) \Phi'(t_0, t), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

$$8. \det \Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \text{tr } A(\sigma) d\sigma \right].$$

9. При преобразовании координат $z(t) = P(t)x(t)$ переходная матрица $\Phi_A(t, t_0)$ системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ преобразуется по формуле

$$\Phi_A(t, t_0) = P^{-1}(t) \Phi_{[PAP^{-1}, \dot{P}P^{-1}]} P(t_0).$$

Свойства 1-9 выполнены при любых t, t_0 . Не обязательно, чтобы $t_0 < t$!

В стационарном случае имеют место свойства:

$$10. \Phi(t - t_1, t_0) = \Phi(t, t_0) \Phi(t_1, t_0).$$

$$11. \Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = e^{At} e^{-At_0}.$$

Из последнего свойства, в частности, следует, что в стационарном случае достаточно вычислить матрицу $\Phi(t, t_0)$ при значении $t_0 = 0$, т. е. вычислить e^{At} . Чтобы получить переходную матрицу $\Phi(t, t_0)$, достаточно заменить t разностью $(t - t_0)$. Стационарная система не меняет своих свойств при сдвиге времени.

Способы построения переходной матрицы. 1. Если каким-либо способом найдено общее решение дифференциального уравнения, то, чтобы получить переходную матрицу, достаточно вычислить столбцы решений при следующих начальных условиях: $x_1^0 = [1, 0, \dots, 0]$, $x_2^0 = [0, 1, \dots, 0]$, $\dots$, $x_n^0 = [0, 0, \dots, 1]$.

2. Переходную матрицу можно получить с помощью моделирования уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ на электронной или другой модели. Это соответствует экспериментальному осуществлению способа 1. Действительно, поставим на модели начальные условия: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0, \dots, x_n^0 = 0$. Тогда на выходах интеграторов мы получим функции $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{21}(t)$, $\dots$, $\Phi_{n1}(t)$, которые являются элементами первого столбца переходной матрицы. Продолжая эксперимент для начальных условий $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1, \dots, x_n^0 = 0$, получим элементы второго столбца переходной матрицы и т. д. Заметим, что метод

моделирования является общим. Он работает в тех случаях, когда другие методы не дают результата.

3. Переходную матрицу можно строить, суммируя ряд, полученный при доказательстве теоремы 3 § 9. В стационарном случае этот метод часто приводит к требуемому результату.

4. Переходную матрицу можно вычислять, интегрируя одно из матричных уравнений (свойства 6 и 7 переходной матрицы). Этот метод удобен при вычислении переходной матрицы на ЭВМ. Часто более удобным оказывается интегрирование сопряженного уравнения (свойство 7) в обратном времени. $\odot$

При построении переходной матрицы следует использовать хорошо развитые методы решения систем дифференциальных уравнений. Известно, что в стационарном случае переходную матрицу можно построить в замкнутой форме с помощью элементарных функций.

5. Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений широко используется аппарат преобразования Лапласа. Этот аппарат можно непосредственно использовать для вычисления переходной матрицы следующим образом. Обозначим через $\mathcal{L}(x(t)) = x(p)$ преобразование Лапласа функции $x(t)$. Тогда из теории этого преобразования известно, что если $x(t)$ дифференцируема, то

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = p\mathcal{L}(x(t)) - x_0 = px(p) - x_0, \quad \text{где} \quad x_0 = x(0).$$

Рассмотрим стационарную однородную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0,$$

и ее преобразование Лапласа

$$px(p) - x_0 = Ax(p).$$

Тогда

$$px(p) - Ax(p) = x_0, \quad \text{или} \quad [pE - A]x(p) = x_0.$$

Слева стоит характеристическая матрица матрицы A , которая является неособенной при всех $p \neq \lambda_i$, где λ_i — характеристические числа матрицы A . Значит, выражение $x(p) = [pE - A]^{-1}x_0$ имеет смысл при всех $p \neq \lambda_i$. Взяв обратное преобразование, найдем

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(p)] = \mathcal{L}^{-1}\{[pE - A]^{-1}x_0\} = e^{At}x_0.$$

Последовательность вычислений такова:

1. Вычислить элементы обратной матрицы $[pE - A]^{-1}$.
2. С помощью таблиц обратного преобразования Лапласа найти элементы переходной матрицы

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{[pE - A]^{-1}\} \cdot \odot$$

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad [pE - A] = \begin{bmatrix} p & -3 \\ -5 & p-2 \end{bmatrix},$$

$$[pE - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p-2}{(p+3)(p-5)} & \frac{3}{(p+3)(p-5)} \\ \frac{5}{(p+3)(p-5)} & \frac{p}{(p+3)(p-5)} \end{bmatrix}.$$

Пользуясь таблицей обратного преобразования Лапласа, получим

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{[pE - A]^{-1}\} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-3t} + e^{5t}}{2} & \frac{3}{8}(e^{5t} - e^{-3t}) \\ \frac{5}{8}(e^{5t} - e^{-3t}) & \frac{3e^{-3t} + 5e^{5t}}{8} \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Для системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

переходную матрицу проще всего вычислить, воспользовавшись формулой Ф $(t, 0) = e^{At}$. Ряд экспоненты в этом случае имеет только два ненулевых члена $e^{At} = E + At$; так как $A^p = 0$ при $p \geq 2$, имеем

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Пусть уравнения системы имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Столбцы переходной матрицы получим, решая эти уравнения при начальных условиях $x_{01} = [1, 0, 0]$, $x_{02} =$

$$= [0, 1, 0], \quad \dot{x}_{03} = [0, 0, 1]:$$

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{33}t} \end{bmatrix}.$$

Пример 5. Рассмотрим нестационарную систему

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} x(t), \quad t > 0.$$

Одна из фундаментальных матриц этой системы имеет вид

$$X(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим

$$X^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_0} & 0 \\ -\frac{1}{t_0^3} & \frac{1}{t_0^2} \end{bmatrix}$$

и переходную матрицу

$$\Phi(t, t_0) = X(t) X^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 \\ \frac{1}{t_0} - \frac{t^2}{t_0^3} & \frac{t^2}{t_0^2} \end{bmatrix}.$$

Задачи. 1. Покажите, что для системы $\dot{x}(t) = (A_1(t) + A_2(t))x(t)$, где $A_1(t)$ — диагональная матрица, а элементы матрицы $A_2(t)$ неотрицательны при всех $t \geq t_0$, каждый элемент соответствующей переходной матрицы $\Phi(t, t_0)$ неотрицателен.

2. Покажите, что если $x(t)$ и $z(t)$ — два решения дифференциального уравнения предыдущей задачи и если $x_i(t_0) \geq z_i(t_0)$ при всех i , то $x_i(t) \geq z_i(t)$ при всех i и при всех $t \geq t_0$.

3. Используя равенство $e^{At}e^{At_0} = e^{A(t+t_0)}$ при $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, покажите, что

$$\sin(t + t_0) = \cos t \sin t_0 + \sin t \cos t_0.$$

4. Найдите переходную матрицу для

$$\text{а) } A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & -t^2 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad t > 0, \quad \text{б) } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - t^2 & 2t \end{bmatrix}.$$

5. Пусть отображение $C_*^n[t_0, t_1] \rightarrow C_*^n[t_0, t_1]$ задано формулой

$$y(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma,$$

где $\Phi(t, \sigma)$ — переходная матрица. Вычислите сопряженное преобразование.

6. Покажите, что если $A(t) = -A'(-t)$ для всех t , то матрица $\Phi(t, t_0)$ и матрица $\Phi(t_0, t)$ имеют одни и те же собственные числа.

7. Вычислите переходную матрицу системы

$$\dot{x}(t) = e^{-At} B e^{At} x(t),$$

где A и B — постоянные матрицы.

8. Пусть

$$y(t) = a' e^{At} b = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \sin 2\pi k t + \beta_k \cos 2\pi k t).$$

Найдите соответствующие векторы a , b и матрицу A .

9. Покажите, что

$$\int_0^1 e^{As} ds = A^{-1} [e^{A} - E],$$

где A — постоянная неособенная матрица.

10. Решение одномерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad t \geq 0$$

с граничными условиями $z(t, 0) = z(t, 1) = 0$ имеет вид $z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin 2\pi n x$. Выпишите бесконечномерную систему диффе-

ренциальных уравнений для функций $y_n(t)$. Найдите соответствующую переходную матрицу.

11. Пусть граничные условия уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ заданы частично при $t = t_0$ и частично при $t = t_1$ и пусть эти не полностью заданные векторы граничных условий $\bar{x}(t_0)$, $\bar{x}(t_1)$ связаны уравнением

$$F\bar{x}(t_0) + G\bar{x}(t_1) = g.$$

Каким условиям должны удовлетворять матрицы F и G , чтобы существовало единственное решение дифференциального уравнения? Вычислите вектор начальных условий для этого решения.

12. Покажите, что в первом приближении по ε

$$\det [E + \varepsilon A(t)] = E + \varepsilon \operatorname{tr} A(t),$$

$$\Phi(t + \varepsilon, t_0) = \Phi(t, t_0) + \varepsilon A(t) \Phi(t, t_0).$$

Используя эти факты, докажите теорему 1.

13. Согласно данному определению самосопряженного дифференциального уравнения, его матрица должна удовлетворять условию $A(t) = -A'(t)$. Если для матрицы $A(t)$ это условие не выполняется, то оно, вообще говоря, может быть выполнено для матрицы $P^{-1}A(t)P$, где $|P| \neq 0$. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица $A(t)$, чтобы

$$[P^{-1}A(t)P] = -[P^{-1}A(t)P]'?$$

14. Найдите линейное нестационарное дифференциальное уравнение, переходная матрица которого имеет следующие элементы:

$$a) \Phi_{11}(t, t_0) = 0,2 \left[4 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} + \left(\frac{t_0}{t} \right)^2 \right], \quad б) \Phi_{11}(t, t_0) = \frac{t}{t_0} \left(1 + \ln \frac{t_0}{t} \right),$$

$$\Phi_{12}(t, t_0) = 0,4 \{ (tt_0)^{1/2} - t_0^2 t^{-2} \}, \quad \Phi_{12}(t, t_0) = t \ln \frac{t}{t_0},$$

$$\Phi_{21}(t, t_0) = 0,4 \{ (tt_0)^{1/2} - t_0^2 t^{-3} \}, \quad \Phi_{21}(t, t_0) = \frac{1}{t_0} \ln \frac{t_0}{t},$$

$$\Phi_{22}(t, t_0) = 0,2 \left[\left(\frac{t_0}{t} \right)^{1/2} + 4 \left(\frac{t_0}{t} \right)^3 \right], \quad \Phi_{22}(t, t_0) = 1 + \ln \frac{t}{t_0}.$$

§ 11. Линейные системы с периодическими коэффициентами

В приложениях линейные периодические уравнения часто возникают при линеаризации нелинейных систем в окрестности их периодических решений.

Периодические линейные уравнения являются простейшим и довольно хорошо изученным классом нестационарных уравнений.

Однако в отличие от стационарного случая даже здесь получить явное решение не всегда возможно. Вместе с тем периодичность матрицы $A(t)$ влечет за собой некоторые структурные свойства переходной матрицы, и на этом мы остановимся подробнее.

Функцию $f(t)$, определенную на всей числовой оси, назовем *периодической* с периодом T , если $f(t+T) = f(t)$ для всех t . Согласно этому определению любая постоянная величина (даже 0) является периодической функцией. Ясно, что всякая функция периода T является периодической с периодом $2T$, $3T$ и т. д. Поэтому период определяется неоднозначно. Если мы в дальнейшем говорим о периоде, то имеем в виду какой-нибудь период.

Рассмотрим периодическую однородную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t+T) = A(t). \quad (\text{ЛПО})$$

Пусть $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица этой системы. Заметим, что периодичность матрицы $A(t)$ влечет за собой периодичность переходной матрицы $\Phi(t \pm T, t_0 \pm T) = \Phi(t, t_0)$. Это, например, сразу следует из дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Преобразование Ляпунова. Приводимые системы. Уравнение (ЛПО) принадлежит, как будет показано ниже, к таким нестационарным уравнениям, которые можно с помощью невырожденного линейного преобразования $z(t) = L(t)x(t)$ свести к стационарному уравнению $\dot{z}(t) = Bz(t)$. Этот класс нестационарных уравнений очень важен для приложений. Например, исследование устойчивости для таких систем иногда можно свести к исследованию устойчивости стационарной системы. Рассмотрим необходимые и достаточные условия приводимости системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ к стационарной системе.

О п р е д е л е н и е 1. Преобразование $z(t) = L(t)x(t)$ называется *преобразованием Ляпунова*, $L(t)$ называется *матрицей Ляпунова*, если выполнены следующие условия:

1. $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены на интервале $[t_0, \infty]$.
2. Существует постоянная величина m такая, что $0 < m \leq |\det L(t)|$ для всех $t \in [t_0, \infty]$. $\odot$

Постоянная неособенная матрица L является, очевидно, матрицей Ляпунова. Если A — постоянная матрица с вещественными характеристическими числами, то e^{At} и e^{-At} будут, как легко видеть, матрицами Ляпунова.

О п р е д е л е н и е 2. Однородная линейная система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ называется *приводимой*, если с помощью преобразования Ляпунова она может быть преобразована в линейную систему $\dot{z}(t) = Bz(t)$, где B — постоянная матрица. $\odot$

Приведем необходимые и достаточные условия приводимости линейной нестационарной системы.

Теорема Еругина. Т е о р е м а 1. *Линейная система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ приводима тогда и только тогда, когда ее переходная матрица представима в виде*

$$\Phi(t, t_0) = L(t) \exp [B(t - t_0)] L^{-1}(t_0),$$

где $L(t)$ — матрица Ляпунова, B — постоянная матрица.

Необходимость. Пусть рассматриваемая система приводима и существует матрица Ляпунова $L(t)$ такая, что уравнение системы относительно новой переменной $z(t) = L^{-1}(t)x(t)$ имеет вид $\dot{z}(t) = Bz(t)$. Переходная матрица этого уравнения $\exp[B(t-t_0)]$, и значит,

$$x(t) = L(t)z(t) = L(t)e^{B(t-t_0)}z(t_0) = \\ = L(t)e^{B(t-t_0)}L^{-1}(t_0)x(t_0).$$

Достаточность. Пусть переходная матрица системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ представима в виде, указанном в условии теоремы. Непосредственной проверкой убедимся, что преобразование координат $z(t) = L^{-1}(t)x(t)$, где $L^{-1}(t) = e^{B(t-t_0)}L^{-1}(t_0)\Phi(t_0, t)$, приводит к стационарной системе. Действительно,

$$z(t) = [L^{-1}(t)L(t) + L^{-1}(t)A(t)L(t)]z(t) = \\ = \{[BL^{-1}(t) - L^{-1}(t)A(t)]L(t) + \\ + L^{-1}(t)A(t)L(t)\}z(t) = Bz(t).$$

Первую строку мы записали на основании результата

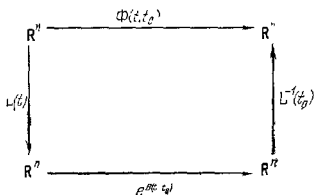


Рис. 11.1.

теоремы 2 § 10. Вторая получена после вычисления производной $\dot{L}^{-1}(t)$. При этом мы воспользовались формулами

$$\frac{d}{dt}e^{B(t-t_0)} = Be^{B(t-t_0)}, \quad \dot{\Phi}(t_0, t) = -\Phi(t_0, t)A(t). \odot$$

Теорема Еругина иллюстрируется коммутативной диаграммой, представленной на рис. 11.1.

Пример 1. Пусть $\dot{x}(t) = e^{At}Be^{-At}x(t)$. Рассмотрим замену $z(t) = e^{-At}x(t) = P^{-1}(t)x(t)$. Тогда преоб-

разованная матрица системы $\tilde{A}$ согласно теореме 3 § 10 примет вид

$$\tilde{A} = P A P^{-1} + \dot{P} P^{-1} = e^{-At} e^{At} B e^{-At} e^{At} - A e^{-At} e^{At} = B - A.$$

Значит, $\dot{z}(t) = (B - A) z(t)$ и $z(t) = e^{(B-A)(t-t_0)} z(t_0)$. Отсюда сразу получим искомую декомпозицию переходной матрицы, о которой говорится в теореме Еругина:

$$x(t) = P(t) z(t) = e^{At} e^{(B-A)(t-t_0)} z(t_0) = e^{At} e^{(B-A)(t-t_0)} e^{-At} x(t_0).$$

Теорема Ляпунова — Флоке. Вернемся к периодической однородной системе (ЛПО). Приводимость такой системы следует из доказанной теоремы. Достаточно определить постоянную матрицу B формулой $\Phi(T, 0) = \exp(BT)$. Такая матрица B всегда существует, так как переходная матрица $\Phi(T, 0)$ — неособенная, а любая неособенная матрица C может быть представлена в виде $C = \exp B$ (см. [22]).

Определим матрицу Ляпунова формулой $L^{-1}(t) = \Phi(t, 0) e^{-Bt}$, тогда $\Phi(t, 0) = L^{-1}(t) e^{Bt}$, $\Phi(0, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, 0) = e^{-Bt_0} L(t_0)$ и, наконец, $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, 0) \Phi(0, t_0) = L^{-1}(t) e^{B(t-t_0)} L(t_0)$. Это и есть декомпозиция переходной матрицы, требуемая теоремой Еругина.

Заметим, что матрица $L^{-1}(t) = \Phi(t, 0) e^{-Bt}$ является периодической. Действительно,

$$\begin{aligned} L^{-1}(t+T) &= \Phi(t+T, 0) \exp[-B(t+T)] = \\ &= \Phi(t+T, T) \Phi(T, 0) \exp(-BT) \exp(-Bt) = \\ &= \Phi(t+T, T) \exp(-BT) = \\ &= \Phi(t, 0) \exp(-Bt) = L^{-1}(t). \end{aligned}$$

Переход от 1-й строки ко 2-й следует из формулы $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, \sigma) \Phi(\sigma, t_0)$. 3-я строка следует из 2-й по определению матрицы Φ . 4-я получается с использованием факта периодичности переходной матрицы $\Phi(t+T, t_0+T) = \Phi(t, t_0)$. Прделанные вычисления приводят к следующему результату.

Теорема 2. (Ляпунова — Флоке). *Линейная система (ЛПО) с непрерывной периодической матрицей $A(t+T) = A(t)$ приводима. Соответствующая матрица Ляпунова L является периодической $L(t) = L(t+T)$.* ○

Пример 2. Рассмотрим линейную периодическую систему

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin t & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Легко видеть, что векторы $x_1'(t) = [e^t, -e^t \cos t]$, $x_2'(t) = [0, e^t]$ являются линейно независимыми решениями и, следовательно, матрица

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ -e^t \cos t & e^t \end{bmatrix}$$

— фундаментальная матрица. Вычислим переходную матрицу системы

$$\Phi(t, t_0) = X(t) X^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ (\cos t_0 - \cos t) e^{t-t_0} & e^{t-t_0} \end{bmatrix}.$$

Постоянная матрица B в условиях теоремы Еругина определится равенством

$$\Phi(2\pi, 0) = e^{B2\pi}, \text{ откуда } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos t_0 - 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L^{-1}(t) = \Phi(t, 0) e^{-Bt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \cos t & 1 \end{bmatrix}, \quad L(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos t_0 - 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$L^{-1}(t)$ и $L(t)$ — периодические функции. Декомпозиция переходной матрицы, о которой говорит теорема Еругина, имеет вид

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \cos t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \cos t_0 & 1 \end{bmatrix} \odot$$

Периодические решения однородной системы. Хотя переходная матрица системы (ЛПО) является периодической $\Phi(t+T, t_0+T) = \Phi(t, t_0)$, откуда не следует, что $\Phi(t+T, t_0) = \Phi(t, t_0)$, и, значит, решение $x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0)$ будет периодическим только в специальных случаях. Соответствующие условия дает

Теорема 3. Для того чтобы решение системы (ЛПО) было периодическим с периодом T , необходимо и достаточно, чтобы вектор начальных условий принадлежал ядру преобразования $[E - \Phi(t_0+T, t_0)]$. Здесь E — единичная матрица.

Доказательство. Если существует периодическое решение, то оно удовлетворяет условию

$$x(t_0 + T) = x(t_0) = \Phi(t_0 + T, t_0)x(t_0),$$

которое выполняется при любом t_0 . Это условие можно переписать так:

$$[E - \Phi(t_0 + T, t_0)]x_0 = 0.$$

Обратно, если x_0 лежит в ядре указанного в условии теоремы преобразования, то, выбирая этот вектор в качестве начального условия, получим периодическое решение. $\odot$

Следствие 1. Если $\text{rang } [E - \Phi(t_0 + T, t_0)] = n$, то система (ЛПО) имеет только тривиальное периодическое решение $x(t) = 0$, так как в этом случае ядро преобразования состоит только из нулевого вектора.

Следствие 2. Для того чтобы сопряженная система $\dot{p}(t) = -A'(t)p(t)$ имела периодическое решение периода T , необходимо и достаточно, чтобы вектор начальных условий $p(t_0)$ лежал в ядре преобразования $[E - \Phi'(t_0 + T, t_0)]$. $\odot$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Пример 3. Рассмотрим переходную матрицу линейного осциллятора $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t - t_0) & \sin(t - t_0) \\ -\sin(t - t_0) & \cos(t - t_0) \end{bmatrix}.$$

Оператор $[E - \Phi(t_0 + 2\pi, t_0)]$ является нулевым, и следовательно, ядру этого оператора принадлежат все ненулевые векторы начальных условий. Система при любых начальных условиях имеет решение периода 2π .

Пример 4. Рассмотрим переходную матрицу периодической системы примера 2. Нетрудно видеть, что ранг линейного преобразования $[E - \Phi(t_0 + 2\pi, t_0)]$ равен 2, и следовательно, система имеет только тривиальное периодическое решение. $\odot$

Периодические решения неоднородной системы. Будем рассматривать системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + f(t), \\ A(t + T) &= A(t), \quad f(t + T) = f(t). \end{aligned} \quad (\text{ЛПН})$$

Как и в случае однородного уравнения, из периодичности функций $A(t)$, $f(t)$ не следует периодичность решения. Его может не существовать даже при $A(t) = 0$. Например, уравнение $\dot{x}(t) = 1 + \sin t$, $x(0) = 0$ имеет решение

$$x(t) = 1 - t - \cos t \neq x(t + 2\pi).$$

Займемся сначала вопросом существования периодических решений (ЛПН). Основные результаты содержит

Теорема 4. Пусть $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица, соответствующая матрице $A(t)$. Решение уравнения (ЛПН) тогда и только тогда можно представить в виде

$$x(t) = x_{\Pi}(t) + \Phi(t, t_0)[x_0 - x_1],$$

где $x_{\Pi}(t)$ имеет период T , а x_1 — постоянный вектор, когда

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p'(\sigma) f(\sigma) d\sigma = 0 \quad (1)$$

для каждого n -вектора $p(\sigma)$, который имеет период T и является решением сопряженного уравнения

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t).$$

Доказательство. Равенство (1) называется условием ортогональности.

Прежде чем доказать теорему, напомним известный факт линейной алгебры. Линейное уравнение $Ax = b$, где A квадратная матрица порядка n , имеет решение тогда и только тогда, когда всякое решение сопряженного однородного уравнения $A'x = 0$ ортогонально вектору b (см. § 8, теорема 2).

Решение уравнения (ЛПН) дает формула Коши, которую можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \left[x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \sigma) f(\sigma) d\sigma \right].$$

Если существует периодическое решение, то выполнено условие $x(t) = x(t + T)$ при любых $t \geq t_0$, и в частности, при $t = t_0$. $x(t_0)$ для этого решения обозначим через x_1 . Тогда из формулы Коши следует, что x_1 удовлетворяет

уравнению

$$x_1 - \Phi(t_0 + T, t_0) \left[x_1 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0, \sigma) f(\sigma) d\sigma \right].$$

Умножая это равенство слева на матрицу

$$\Phi(t_0, t_0 + T) - \Phi^{-1}(t_0 + T, t_0),$$

получим эквивалентное уравнение

$$[\Phi(t_0, t_0 + T) - E] x_1 - \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0, \sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

Вектор справа в этом уравнении обозначим через q . Согласно приведенной нами теореме линейной алгебры это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда вектор q ортогонален всем решениям однородной системы

$$[\Phi(t_0, t_0 + T) - E] p_0 = 0.$$

Но решениям этого уравнения соответствуют согласно следствию 2 теоремы 3 периодические решения сопряженной системы. Другими словами, если p_0 является решением этого уравнения, то $p(\sigma) = \Phi(t_0, \sigma) p_0$ имеет период T . Таким образом, необходимым и достаточным условием существования частного периодического решения уравнения (ЛПН) является условие

$$p'_0 q = p'_0 \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0, \sigma) f(\sigma) d\sigma = 0,$$

которое совпадает с условием ортогональности (1), так как

$$p'_0 \Phi(t_0, \sigma) = p'(\sigma).$$

Таким образом, доказано, что условие ортогональности необходимо и достаточно для того, чтобы существовал вектор x_1 такой, что решение, проходящее через x_1 в момент t_0 , было бы периодическим.

Если такое x_1 существует, то обозначим соответствующее периодическое решение через $x_{II}(t)$. Тогда

$$x_{II}(t) = \Phi(t, t_0) x_1 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

Воспользовавшись этим равенством, формулу Коши для решения, проходящего в момент t_0 через x_0 , можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + [x_n(t) - \Phi(t, t_0)x_1] - \\ - x_n(t) + \Phi(t, t_0)[x_0 - x_1].$$

Значит, если выполняется условие ортогональности, то решение представимо в виде, требуемом условием теоремы. Верно и обратное. Пусть решение можно записать в виде суммы частного периодического решения и решения однородного уравнения. Тогда существует вектор x_0 , именно $x_0 = x_1$, такой, что общее решение является периодическим, и значит, выполняется условие ортогональности. $\odot$

Имеется ряд специальных случаев, в которых данная теорема имеет более простой вид и ее результаты легче интерпретировать. Приведем два таких результата, которые сформулируем в виде следствий.

С л е д с т в и е 1. Если однородное уравнение имеет только тривиальное периодическое решение, то решение (ЛПН), которое проходит через x_0 при $t = t_0$, может быть единственным образом представлено в виде

$$x(t) = x_n(t) + \Phi(t, t_0)[x_0 - x_1],$$

где $x_n(t)$ периодически и дается формулой

$$x_n(t) = \Phi(t, t_0)x_1 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma)f(\sigma)d\sigma,$$

а

$$x_1 = [\Phi(t_0, t_0 + T) - E]^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0, \sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 1 теоремы 3 однородное уравнение имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы $[\Phi(t_0, t_0 + T) - E]$ равен n . В этом случае существует обратная матрица $[\Phi(t_0, t_0 + T) - E]^{-1}$, и уравнение

$$[\Phi(t_0, t_0 + T) - E]x_1 = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0, \sigma)f(\sigma)d\sigma$$

имеет единственное решение

$$\mathbf{x}_1 = [\Phi(t_0, t_0 + T) - E]^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0, \sigma) \mathbf{f}(\sigma) d\sigma.$$

Отсюда сразу получаем требуемое утверждение. $\odot$

С л е д с т в и е 2. Если A — постоянная матрица и у нее нет чисто мнимых собственных чисел, то решение (ЛПН), которое проходит через $\mathbf{x}_0$ при $t = 0$, можно выразить единственным образом в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_n(t) - \exp(At) [\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_n(0)], \\ \mathbf{x}_n(t) &= e^{At} \mathbf{x}_1 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} \mathbf{f}(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x}_1 = [e^{-At} - E]^{-1} \int_0^t e^{-A\sigma} \mathbf{f}(\sigma) d\sigma.$$

Доказательство в точности совпадает с доказательством следствия 1, если заметить, что в случае, когда A не имеет чисто мнимых корней, оператор $[e^{-At} - E]$ имеет полный ранг. $\odot$

П р и м е р 5. Рассмотрим гармонический осциллятор с периодической возмущающей силой

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad f(t+2\pi) = f(t).$$

Какие дополнительные ограничения нужно наложить на $f(t)$, чтобы существовало периодическое решение?

Так как данная система является самосопряженной, имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

Условие ортогональности принимает вид

$$\mathbf{p}_0' \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$$

а это в свою очередь требует, чтобы

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) \cos \sigma \, d\sigma = \int_0^{2\pi} f(\sigma) \sin \sigma \, d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что периодическое решение будет в том случае, когда ряд Фурье функции f не имеет первой гармоники.

Задачи. 1. Покажите, что если $L(t)$ — матрица Ляпунова, то $L^{-1}(t)$ — тоже матрица Ляпунова.

2. Если $L_1(t)$ и $L_2(t)$ — матрицы Ляпунова, то $L(t) = L_1(t) \cdot L_2(t)$ — тоже матрица Ляпунова.

3. Покажите, что $x = e^{At}x$ — преобразование Ляпунова, если $A = A'$.

4. Вычислите переходную матрицу $\Phi(t, t_0)$ для системы

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ 0 & -2 + \cos t \end{bmatrix} x(t).$$

Так как система имеет период 2π , то $\Phi(t, t_0)$ можно записать в виде

$$\Phi(t, t_0) = L^{-1}(t) e^{B(t-t_0)} L(t_0).$$

Проведите эти вычисления.

5. Найдите преобразование Ляпунова, приводящее скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = x(t) \sin t$$

к стационарному виду.

6. Рассмотрите уравнение $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$ при $b = \text{const}$. При каких условиях существует постоянное решение при подходящих x_0 ?

7. Выпишите декомпозицию Ляпунова для переходной матрицы линейного осциллятора.

8. Определите, имеет ли каждая из следующих систем периодическое решение периода 2π , и если да, то единственны ли они?

$$\text{а) } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t,$$

$$\text{б) } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t,$$

$$\text{в) } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t,$$

$$\text{г) } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

9. Выпишите решение системы

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix},$$

проходящее при $t = 0$ через точку $[1, 1]$ x_0 , в виде, требуемом теоремой 4. Каким начальным условиям при $t = 0$ удовлетворяет частное периодическое решение?

10. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица A , чтобы $\exp(At)$ была бы периодической?

11. Найдите любое решение уравнения $C' = \exp R$ для следующих матриц C :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix}, & \text{б) } \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \\ \text{в) } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, & \text{г) } \begin{bmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{bmatrix}. \end{array}$$

12. Покажите, что общее решение уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \eta(t) \dot{x}(t) + \gamma(t)x(t) &= 0, \\ \eta(t+T) &= \eta(t), \quad \gamma(t+T) = \gamma(t) \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$x(t) = \alpha p_1(t) e^{\lambda_1 t} + \beta p_2(t) e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1, λ_2 — действительные, а $p_1(t)$ и $p_2(t)$ имеют период T , или в виде

$$x(t) = \alpha p_1(t) e^{\lambda t} + \beta p_2(t) e^{\lambda t},$$

где λ — действительное, а $p_1(t)$ и $p_2(t)$ имеют период T .

13. Покажите, что уравнение $x(t) + \dot{x}(t) + \dot{x}(t) = \sin nt - 1$:

а) не имеет периодических решений при $n = 1$;

б) имеет единственное периодическое решение периода $2\pi/n$ для $n = 2, 3, \dots$;

в) имеет два параметрических семейства периодических решений для $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

14. Для системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + b \operatorname{sign}(\sin t)$ проведите декомпозицию в соответствии с теоремой Бругина при соответствующих предположениях относительно матрицы A .

15. Пусть $A(t)$ имеет период T_1 , $f(t)$ — период T_2 . Покажите, что если все решения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, то существует вектор g периода T_2 и матрица $P(t)$ периода T_1 такое, что общее решение уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\xi + P(t)g(t).$$

16. Общее решение уравнения $\dot{x}(t) = A x(t) + f(t)$, где $A = \text{const}$, $f(t) = f(t + 2\pi)$, имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ch}(t - t_0) & \text{sh}(t - t_0) \\ \text{sh}(t - t_0) & \text{ch}(t - t_0) \end{bmatrix} [x_0 - x_1].$$

Найдите матрицу A и функцию $f(t)$, если известно, что $f(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$.

§ 12. Линейные матричные уравнения

В § 10 уже встречались матричные дифференциальные уравнения. Например, переходная матрица была определена как решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

В данном разделе рассмотрим решения линейных матричных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X}(t) = A_1(t) X(t) + X(t) A_2(t) + F(t) \quad (\text{ЛМ})$$

и обсудим некоторые вопросы, связанные с приложениями таких уравнений.

Матричная формула вариации постоянных. Сначала заметим, что уравнение (ЛМ) можно записать в виде системы линейных дифференциальных уравнений. Если все матрицы в (ЛМ) имеют размерность $n \times n$, то размерность вектора решений будет n^2 . Ясно, что все предыдущие результаты, полученные для линейных дифференциальных уравнений вида $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$, будут справедливы и для уравнения (ЛМ), записанного в векторной форме. Поэтому, в частности, нет нужды доказывать теоремы о существовании и единственности решения уравнения (ЛМ). Однако, поскольку в приложениях часто приходится иметь дело с уравнениями, записанными в виде (ЛМ), а эквивалентное векторное уравнение имеет матрицу размером $(n^2 \times n^2)$, для дальнейшего будет удобнее не приводить матричное дифференциальное уравнение к обычной векторной записи, а получить решение в матричной форме.

Т е о р е м а 1 (матричная формула вариации постоянных). Если $\Phi_1(t, t_0)$ — переходная матрица для уравнения $\dot{x}(t) = A_1(t)x(t)$, а $\Phi_2(t, t_0)$ — переходная матрица

для уравнения $\dot{X}(t) = A_2'(t) X(t)$, то решение уравнения (ЛМ) с начальным условием $X(t_0)$ дается формулой

$$X(t) = \Phi_1(t, t_0) X(t_0) \Phi_2'(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \sigma) F(\sigma) \Phi_2'(\sigma, t_0) d\sigma.$$

Доказательство. Дифференцируя это выражение по t и используя равенства $\Phi_1'(t, t_0) = A_1(t) \cdot \Phi_1(t, t_0)$ и $\Phi_2'(t, t_0) = A_2'(t) \Phi_2(t, t_0)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A_1(t) \Phi_1(t, t_0) X(t_0) \Phi_2'(t, t_0) + \\ &+ A_1(t) \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \sigma) F(\sigma) \Phi_2'(\sigma, t_0) d\sigma + \Phi_1(t, t_0) X(t_0) \Phi_2'(t, t_0) A_2(t) + \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_1(t, \sigma) F(\sigma) \Phi_2'(\sigma, t_0) A_2(t) d\sigma + F(t). \end{aligned}$$

Поэтому $X(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (ЛМ). Легко проверить, что начальные условия тоже выполняются. $\odot$

Сопряженное уравнение. Множество квадратных матриц порядка n , как было показано в § 6, образует векторное пространство $R^{n \times n}$. Вводя в этом пространстве скалярное произведение по формуле

$$\langle XY \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij} = \text{tr}(YX) = \text{tr}(XY),$$

получают евклидово пространство, обозначаемое через $E^{n \times n}$. По аналогии с векторным линейным уравнением назовем *сопряженным* такое матричное дифференциальное уравнение, решение которого $P(t)$ при любом t удовлетворяет условию

$$\langle X(t), P(t) \rangle = \text{tr}(X'(t) P(t)) = \text{const},$$

где $X(t)$ — решение однородного уравнения

$$\dot{X}(t) = A_1(t) X(t) + X(t) A_2(t).$$

Пользуясь этим определением, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \text{tr}(X'(t) P(t)) = \text{tr}(\dot{X}'(t) P(t) + X'(t) \dot{P}(t)) = \\ &= \text{tr}(X'(t) A_1'(t) P(t) + A_2'(t) X'(t) P(t) + X'(t) \dot{P}(t)). \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу уравнения

$$\dot{X}'(t) - X'(t) A_1'(t) + A_2'(t) X'(t).$$

Вспомня теперь, что $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ и $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$, мы видим, что

$$0 = \text{tr} \{X'(t) [\dot{P}(t) + A_1'(t) P(t) + P(t) A_2'(t)]\}.$$

Поскольку это условие должно выполняться при любых $X(t)$, $P(t)$, имеем уравнение для $P(t)$:

$$\dot{P}(t) - A_1'(t) P(t) - P(t) A_2'(t), \quad (\text{MC})$$

называемое сопряженным уравнением. Сформулируем результат проделанных вычислений.

Теорема 2. Если определить скалярное произведение матриц $X(t)$ и $P(t)$ в виде $\langle X(t), P(t) \rangle = \text{tr}(P'(t) X(t))$, то уравнение (MC) будет сопряженным для однородного матричного уравнения

$$\dot{X}(t) = A_1(t) X(t) + X(t) A_2(t). \quad \odot$$

Как будет ясно из дальнейшего, уравнения вида (MC) играют важную роль в теории управления линейными системами. Здесь рассмотрим одно из приложений этого уравнения.

Оценка квадратичного функционала. Пусть для какого-либо решения $x(t)$ системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ требуется оценить величину интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x'(t) W(t) x(t) dt,$$

где $W(t)$ — некоторая матрица $n \times n$, составленная из непрерывных при $t_0 \leq t \leq t_1$ функций времени. Выразим величину J через начальные условия $x(t_0)$. Поскольку в силу уравнения движения $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$, имеем

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x'(t_0) \Phi'(t, t_0) W(t) \Phi(t, t_0) x(t_0) dt = x'(t_0) V(t_0, t_1) x(t_0).$$

Здесь использовано обозначение

$$V(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) W(t) \Phi(t, t_0) dt.$$

Таким образом, искомая величина J является квадратичной формой от $x(t_0)$, а $V(t_0, t_1)$ — матрица этой квадратичной формы. Если известна переходная матрица $\Phi(t, t_0)$, то постоянную матрицу $V(t_0, t_1)$ можно вычислить, воспользовавшись последней формулой. Есть, однако, и другой способ вычисления $V(t_0, t_1)$. Можно свести эту задачу к задаче интегрирования линейного матричного уравнения. Заменив t_0 на t и дифференцируя выражение для $V(t, t_1)$ по t , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, t_1) &= \frac{d}{dt} \int_t^{t_1} \Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t) d\sigma - \\ &= -A'(t) V(t, t_1) - V(t, t_1) A(t) - W(t). \end{aligned}$$

Из определения $V(t, t_1)$ следует, что $V(t_1, t_1) = 0$. Добавляя эти граничные условия к дифференциальному уравнению, получим прямой способ вычисления J . Заметим, что это — дифференциальное уравнение с граничным условием, заданным в начальный момент времени t_0 , а в момент окончания переходного процесса. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3. Если $V(t, t_1)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, t_1) &= -A'(t) V(t, t_1) - V(t, t_1) A(t) - W(t), \\ V(t_1, t_1) &= 0, \end{aligned}$$

а $x(t)$ — решение системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, то справедлива формула

$$\int_{t_0}^{t_1} x'(t) W(t) x(t) dt = x'(t_0) V(t_0, t_1) x(t_0). \odot$$

Обратите внимание, что дифференциальное уравнение для $V(t, t_1)$ совпадает с уравнением (MC) при $W(t) = 0$, $A_2' \leftarrow A_1'$!

Случай постоянных матриц A и W наиболее важен на практике. При этом дифференциальное уравнение для $V(t, t_1)$ становится стационарным:

$$\frac{d}{dt} V(t, t_1) = -A'V(t, t_1) - V(t, t_1)A - W, \quad (1)$$

и его решение можно представить в явном виде в тех случаях, когда существует решение матричного линейного уравнения

$$A'V + VA + W = 0. \quad (2)$$

Действительно, обозначим решение этого уравнения через V_1 и введем в (1) замену переменной $\Psi = V - V_1$. Легко проверить, что уравнение для Ψ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \Psi(t, t_1) = -A'\Psi(t, t_1) - \Psi(t, t_1)A, \quad \Psi(t_1, t_1) = -V_1.$$

Воспользовавшись формулой теоремы 1, немедленно получаем явное выражение для матрицы $V(t, t_1)$. Именно,

$$V(t, t_1) = V_1 - \exp[A'(t_1 - t)]V_1 \exp[A(t_1 - t)].$$

Из этой формулы, в частности, следует, что если $\exp[A(t_1 - t)] \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow \infty$, то оценка интеграла J на полубесконечном интервале (t_0, ∞) сводится к решению линейного матричного алгебраического уравнения $A'V + VA + W = 0$ относительно матрицы V и подсчету величины J по формуле $J = x'(t_0) V x(t_0)$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим теперь задачу оценки интеграла

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} p'(t) W(t) p(t) dt,$$

где $p(t)$ — решение сопряженного уравнения

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t), \quad p(0) = p_0.$$

Воспользовавшись тем, что $p(t) = \Phi'(t_0, t)p_0$, запишем интеграл в виде

$$J^* = p_0' \tilde{V}(t_0, t_1) p_0 = \int_{t_0}^{t_1} p_0' \Phi(t_0, t) W(t) \Phi'(t_0, t) p_0 dt.$$

Заменяя t_0 на t и дифференцируя матрицу $V(t, t_1)$, получим, как и ранее, дифференциальное уравнение

$$\dot{V}(t, t_1) = A(t)V(t, t_1) + V(t, t_1)A'(t) - W(t), \\ V(t_1, t_1) = 0. \quad (3)$$

Обратите внимание, что это уравнение при $W(t) = 0$ является сопряженным уравнением для уравнения теоремы 3. Оно будет играть в дальнейшем важную роль. Особый интерес будут для нас представлять случаи, когда уравнения (1) и (3) имеют положительно определенное решение.

Матричное уравнение $A'V + VA = -W$. Основные свойства этого уравнения впервые были изучены А. М. Ляпуновым в связи с исследованием устойчивости движений динамических систем. Подробная теория подобных уравнений приведена в книге Ф. Р. Гантмахера «Теория матриц». Для наших целей будет достаточно следующего простого результата.

Теорема 4. Для того чтобы матричное уравнение

$$AX + XA' = -W \quad (4)$$

имело единственное решение при любой вещественной матрице W , необходимо и достаточно, чтобы собственные числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы A удовлетворяли неравенствам $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ при всех $1 \leq i, j \leq n$.

Доказательство. Согласно теореме 2 § 7 для всякой матрицы A существует неособенная матрица T , вообще говоря, комплексная, такая, что матрица $TAT^{-1} = B$ имеет треугольную форму (все элементы матрицы B , расположенные под главной диагональю, равны нулю, а на главной диагонали стоят собственные значения матрицы A).

Умножим данное матричное уравнение слева на T и справа на T' и проведем несложные преобразования:

$$T(AX + XA')T' = TAXT' + TXA'T' = \\ = (TAT^{-1})(TXT') + TXT'T'^{-1}A'T' = -TWT'.$$

Замечая, что $(T^{-1})' = (T')^{-1}$, $(T^{-1}A'T') = (TAT^{-1})' = B'$, и вводя обозначение $Z = TXT'$, придем к уравнению

$$BZ + ZB' = -TWT',$$

где B — треугольная матрица. Это уравнение, очевидно, эквивалентно исходному. Рассматривая это уравнение как систему линейных уравнений и выписывая $n^2 \times n^2$ -матрицу этой системы (оставляем читателю эти вычисления в качестве простого упражнения на закрепление правила умножения матриц), замечаем, что эта матрица — треугольная и на ее диагонали стоят числа $(\lambda_i + \lambda_j)$, $1 \leq i, j \leq n$. Следовательно, определитель этой матрицы, равный произведению диагональных элементов, обращается в нуль тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\lambda_i + \lambda_j = 0$ при каких-либо, может быть и равных, значениях $1 \leq i, j \leq n$. $\odot$

З а м е ч а н и е 1. Требования, предъявляемые теоремой к собственным числам матрицы A , легко интерпретировать геометрически. Ее собственные значения не должны располагаться на комплексной плоскости симметрично относительно начала координат и не должны быть равны нулю. Поэтому если, например, все собственные числа располагаются строго слева от мнимой оси — в этом случае матрица A называется *устойчивой матрицей*, — то уравнение $AV + VA' = W$ имеет единственное решение.

З а м е ч а н и е 2. Если матрица W — симметрическая ($W = W'$), то решение V уравнения $AV + VA' = -W$ тоже будет симметрической матрицей, поскольку в этом случае

$$(AV + VA')' = V'A' + AV' \quad AV' + V'A' = W$$

и уравнение для V' совпадает с исходным уравнением. $\odot$

Если матрица A устойчива, то единственное, в силу замечания 1, решение уравнения $A'V + VA + W = 0$ удовлетворяет равенству теоремы 3

$$x'(0) V x(0) = \int_0^{\infty} x'(t) W x(t) dt,$$

в котором интеграл справа — сходящийся (почему?). Вспоминая теперь, что в стационарном случае $x(t) = e^{At} x(0)$ и $[e^{At}]' = e^{A't}$, имеем

$$x'(0) V x(0) = x'(0) \left(\int_0^{\infty} e^{A't} W e^{At} dt \right) x(0).$$

Отсюда сразу следует

Т е о р е м а 5. Если матрица A устойчива, то единственное решение уравнения $A'V + VA = -W$ можно представить в виде сходящегося интеграла

$$V = \int_0^{\infty} e^{A't} W e^{A't} dt. \odot$$

П р и м е р. Оценим величину интеграла $J =$

$-\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt$ для уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.$$

Собственные числа матрицы A отрицательны. Матрица W , соответствующая данному интегралу, совпадает с единичной матрицей. Поэтому уравнение для V имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Поскольку $W' = W$, имеем $v_{12} = v_{21} = -\frac{1}{2}$, $v_{11} = 1$,

$$v_{22} = \frac{1}{2},$$

$$J = [1, 2] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1.$$

Обсуждение. Дифференциальные матричные уравнения (1), (3) и алгебраическое матричное уравнение Ляпунова (4) играют важнейшую роль в дальнейшем. Напомним, как они были получены в этом разделе. Рассматривалась задача о вычислении значения функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}'(t) W(t) \mathbf{x}(t) dt$$

вдоль решения уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Оказалось, что величина J может быть выражена через начальные условия $x(t_0)$ и некоторую матрицу $V(t_0, t_1)$ в виде квадратичной формы $J = x'(t_0) V(t_0, t_1) x(t_0)$, причем мат-

рица $V(t_0, t_1)$ является решением матричного дифференциального уравнения (1) (теорема 3). Если заменить в интеграле t_0 на t , то в силу теоремы 3 или непосредственным вычислением устанавливаем, что

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} (x'(t) V(t, t_1) x(t)) = -W(t).$$

Полная производная по времени от рассматриваемого функционала равна $-W(t)$. Если интервал времени, в котором рассматривается движение системы, является полубесконечным (t_0, ∞) и если матрица A удовлетворяет условию $\exp A(t - t_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решение названной задачи сводится к решению линейного матричного алгебраического уравнения (2). Нетрудно видеть, что если матрица $W(t)$ строго положительно определена при всех $t_0 \leq t \leq t_1$, например $W(t) = E$, то J характеризует величину «среднеквадратичного» отклонения траектории движения от нуля, так как в этом случае

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \|x(t)\|^2 dt.$$

Тогда на любом конечном интервале $[t_0, t_1]$ решение дифференциального уравнения (1) для $V(t_0, t_1)$ существует и является положительно определенной функцией, строго монотонно убывающей по времени. Если же матрица $W(t)$ не является положительно определенной, а, например, неотрицательно определена, то соответствующая матрица $V(t_0, t_1)$ будет иметь полный ранг только в специальных случаях. Здесь нужны специальные требования к паре матриц $[A(t), W(t)]$. Исследования этих задач составляют основное содержание следующих трех глав. Если уравнения (1), (3) рассматриваются на полубесконечном интервале времени (t_0, ∞) , а это — важнейший практически интересный случай, то они вообще могут не иметь ограниченного решения. Случай, когда эти уравнения имеют положительно определенные ограниченные решения, будут подробно исследованы в дальнейшем.

Задачи. 1. Вычислите значение интеграла в приведенном примере, проинтегрировав уравнения движения. Сравните оба способа. Какой из них выгоднее при более высоком порядке матрицы A ?

2. Выпишите векторное уравнение, эквивалентное уравнению

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + X(t)A'(t) + F(t)$$

в случае, когда A, F имеют размер 2×2 .

3. Для системы $\dot{X}(t) = AX(t)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

вычислите матрицы A_1, A_2 эквивалентного матричного уравнения $\dot{X}(t) = A_1X(t) + X(t)A_2$, где $X(t)$ имеет размер 2×2 .

4. Для стационарного матричного уравнения $\dot{X}(t) = AX(t)$, где матрица A устойчива, покажите, что если $W = W'$ постоянная матрица, то

$$J = \int_0^{\infty} \text{tr} (X'(t) W X(t)) dt = \text{tr} (X(0) V X(0)),$$

где V — постоянная матрица. Найти уравнение для V .

5. Пусть A и B — квадратные матрицы. Покажите, что матричное уравнение $AV + VB = W$ относительно неизвестной матрицы V имеет решение тогда и только тогда, когда $\text{tr}(P'W) = 0$ для любой P , удовлетворяющей уравнению $A'P + PB = 0$. (Указание. Рассмотрите соответствующий линейный оператор в пространстве $E^{n \times n}$.)

6. Имеет ли уравнение $A'V + VA = W$ единственное решение, если

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}?$$

7. Существует ли решение уравнения $AV + VA' = W$, где W — ненулевая вещественная матрица, если A — матрица системы

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 4x = 0?$$

8. Рассмотрите систему $\ddot{x}(t) + 2d\dot{x}(t) + x(t) = 0$ при $t \geq 0$, $d > 0$, $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$. Покажите, что величина

$$J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt$$

достигает минимума при $d = \sqrt{\frac{1+\xi^2}{2\xi^2}}$, где $\xi = \frac{x(0)}{\dot{x}(0)}$.

9. В условиях задачи 7 вычислите величину J , если $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0,5$, $d = \frac{1}{4}$.

10. Вычислите значение α , при котором функционал $J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + \dot{x}^2(t)] dt$ достигает минимума на решениях уравнения

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + \frac{9}{4}\dot{x}(t) + \frac{5}{4}x(t) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, x(0) = \alpha, x(0) = 1.$$

11. Для условий задачи 10 найдите точку $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0)$, лежащую в плоскости $x(0) + \dot{x}(0) + \ddot{x}(0) = 1$, для которой $J = \min$.

§ 13. Численное решение стационарных уравнений

В этом параграфе рассмотрен один эффективный алгоритм вычисления матричной экспоненты. Несмотря на то, что ряд для функции e^{At} сходится абсолютно и равномерно при любых t , численное определение значений этой функции не просто. Особые трудности возникают при большой размерности матрицы A , при наличии у A положительных или значительно отличающихся по модулю собственных значений. Поэтому алгоритмы вычисления матричной экспоненты с помощью ЦВМ важны для приложений. Мы не станем перечислять различные методы решения этой задачи и откажемся от подробного обсуждения этого вопроса. Остановимся лишь на одном из возможных методов.

Скалярное уравнение. Начнем с геометрической интерпретации метода в скалярном случае. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

где $A < 0$. Будем считать, что начальное условие задано при $t = 0$. Поскольку система — стационарная, это не мешает общности рассуждений.

Вычислим решение в точке $t = h$ по заданному значению в нулевой момент времени $x(0)$. Простейший способ заключается в суммировании ряда для экспоненты

$$x(h) = x(0) + \frac{Ah}{1!} x(0) + \frac{A^2 h^2}{2!} x(0) + \dots \quad (*)$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно (теорема 3, § 9) при любых h, A . При вычислении на машине необходимо ограничиться n членами этого ряда. При этом ошибка в определении $x(h)$ будет иметь порядок $O(h^n)$. Этот естественный путь решения задачи не является, однако, самым эффективным. Можно указать следующие «недостатки» этого метода: 1. Если используется конечный отрезок ряда, то вычисления не будут устойчивыми при любых h . Для обеспечения устойчивости h должно быть достаточно малым. 2. Для получения точности $\approx O(h^n)$ необходимо вычислять n членов ряда. 3. Метод использует информацию только о производных в точке $t = 0$, в то время как интуитивно понятно, что поведение функции можно предсказать более точно, если использовать данные о производных в точке $t = h$.

Попробуем улучшить этот алгоритм. Для наглядности ограничимся двумя первыми членами ряда (*) Тогда приближенное решение $x(h)$ имеет вид

$$x(h) = x(0) + Ahx(0) + [1 + Ah]x(0). \quad (1)$$

Примем теперь, что начальные условия заданы в точке $t = h$, и вычислим решение в точке $t = 0$. Ряд экспоненты в этом случае имеет вид

$$x(0) = x(h) - \frac{Ah}{1!}x(h) + \frac{A^2h^2}{2!}x(h) + \dots \quad (**)$$

Если использовать для вычисления $x(h)$ это уравнение, ограничившись первыми двумя членами ряда, то получим

$$x(h) = [1 - Ah]^{-1}x(0). \quad (2)$$

Информацию об обоих уравнениях (*), (**) можно использовать, вычислив полусумму значений $x(h)$, рассчитанных по формулам (1), (2). Соответствующая формула после элементарных преобразований имеет вид

$$x(h) = [1 - Ah]^{-1} \left[1 - \frac{A^2h^2}{2} \right] x(0). \quad (3)$$

Однако этот способ совместного использования уравнений (*), (**) для вычисления значения $x(h)$ не является наиболее эффективным. Гораздо более точную аппроксимацию решения можно получить следующим образом. Вычтем из уравнения (*) уравнение (**) и определим

$x(h)$ из полученного уравнения. Если ограничиться первыми производными, то получим формулу

$$x(h) = \left[1 - \frac{Ah}{2}\right]^{-1} \left[1 + \frac{Ah}{2}\right] x(0). \quad (4)$$

Геометрический смысл формулы (4) состоит в том, что мы приравняем площадь трапеции со сторонами $x(0)$, $x(0) + Ahx(0)$ и площадь трапеции со сторонами $x(h)$, $x(h) - Ahx(h)$ и находим из этого условия $x(h)$. Геометрический смысл формул (1) — (4) ясен из рис. 13.1.

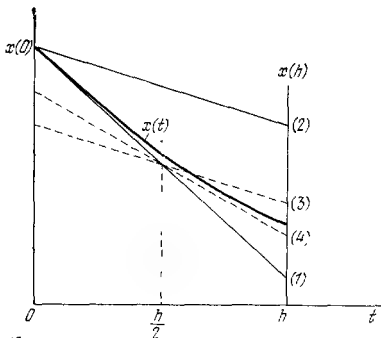


Рис. 13.1.

Сравним эти формулы с точки зрения объема вычислений: (1) — 1 сложение, 2 умножения; (2) — 1 сложение, 2 умножения, 1 деление; (3) — 2 сложения, 3 умножения, 1 деление; (4) — 2 сложения, 2 умножения, 1 деление.

Отметим, что формула (4) требует на одно умножение меньше, чем формула (3). Наконец, сравним эти формулы еще с одной точки зрения. Как они ведут себя при больших значениях h ? Простое исследование показывает, что коэффициент срава, меньший по модулю, чем единица, будет получаться при любом шаге h только в формулах (2), (4). Вычисления по этим формулам устойчивы при

любых значениях h , так как возникающие в процессе вычислений или в задании начальных данных ошибки будут на каждом шаге умножаться на коэффициент по модулю, меньший единицы. Для обеспечения устойчивости формул (1), (3) необходимо позаботиться о том, чтобы h было достаточно малым.

Точность аппроксимации. Сравним формулы (1) — (4) на простом примере. Пусть $A = -0,5$, $h = 1$, $x(0) = 1$. Табличное значение функции $e^{-0,5} = 0,606531$. При использовании приближенных вычислений по формулам (1) — (4) получим

$$(1) \quad x(1) = [1 - 0,5] \cdot 1 = 0,5000,$$

$$(2) \quad x(1) = [1 + 0,5]^{-1} \cdot 1 = 0,666(6),$$

$$(3) \quad x(1) = [1 + 0,5]^{-1} \left[1 - \frac{0,25 \cdot 0,5}{1} \right] \cdot 1 = 0,5833,$$

$$(4) \quad x(1) = [1 + 0,25]^{-1} [1 - 0,25] = 0,6000.$$

Более высокая точность, полученная в случае использования формулы (4), связана с тем, что, как будет понятно в дальнейшем, формула дает значение $x(h)$ с точностью до величины порядка $O(h^3)$.

При выводе формул (1) — (4) мы ограничились первыми двумя членами рядов (*), (**). Чтобы получить более точную аппроксимацию, необходимо рассмотреть большее число членов. Для пяти членов ряда получим следующую формулу, аналогичную формуле (4):

$$x(h) = \left[1 - \frac{hA}{2} + \frac{h^2 A^2}{4} - \frac{h^3 A^3}{12} + \frac{h^4 A^4}{48} \right]^{-1} \times \\ \times \left[1 + \frac{hA}{2} + \frac{h^2 A^2}{4} + \frac{h^3 A^3}{12} + \frac{h^4 A^4}{48} \right] x(0). \quad (5)$$

Эта формула по построению обеспечивает точность аппроксимации решения порядка $O(h^5)$. Существует, однако, более простая формула, дающая ту же точность аппроксимации, о чем свидетельствует

Т е о р е м а 1. Формула

$$x(h) = [12 - 6hA + h^2 A^2]^{-1} [12 + 6hA + h^2 A^2] x(0) \quad (6)$$

аппроксимирует решение уравнения $\dot{x} = Ax$ в точке $t = h$ с точностью до величины порядка $O(h^5)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отношение правых частей формул (5) и (6). Раскрытие скобок и при-

ведение подобных членов немедленно дает

$$\frac{x(h) \text{ (формула (5))}}{x(h) \text{ (формула (6))}} = \frac{12 + h^2 A^2 + O(h^5)}{12 + h^2 A^2 + O(h^5)} = 1 + O(h^5). \odot$$

Точно таким же способом можно убедиться, что формула (4) дает аппроксимацию $x(h)$ с точностью до $O(h^3)$.

Алгоритм решения уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Пусть A — матрица $n \times n$. Формулы (*) и (**) останутся справедливыми, так как ряд матричной экспоненты совпадает по форме с рядом обычной экспоненты. Сохраняются, как нетрудно проверить, и формулы (1) — (5), а также доказательство теоремы 1. Это является следствием того факта, что квадратные матрицы являются элементами кольца, и потому при замене скаляра A матрицей A необходимо лишь внимательно следить за порядком сомножителей, поскольку кольцо матриц некоммутативно, и за выполнимостью операции деления, так как не всякая матрица имеет обратную. Поэтому, используя формулу (6), можно построить следующий алгоритм решения дифференциального уравнения $\dot{x} = Ax$:

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) \simeq \Lambda x(t), \quad (7)$$

где

$$e^{At} \simeq \Lambda \quad [12E - 6Ah + A^2h^2]^{-1} [12E + 6Ah + A^2h^2],$$

причем точность аппроксимации $x(t+h)$ составит $O(h^5)$. Если необходимо вычислить $x(t)$ в последовательные моменты времени $t = ih$, где $i = 1, 2, \dots$, то расчеты сводятся к умножению полученного на предыдущем шаге вектора $x(t)$ на матрицу Λ .

Поскольку формула (7) содержит операцию обращения матрицы, необходимо убедиться в том, что эта матрица — неособенная. Если матрица A устойчива, т. е. все ее характеристические числа имеют отрицательные вещественные части, то справедлива

Т е о р е м а 2. Если матрица A устойчива, то матрица $C = [12E - 6Ah + A^2h^2]^{-1} [12E + 6Ah + A^2h^2]$ — неособенная при любом $h > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой о треугольной матрице. Пусть $A = PTP^{-1}$, где T — треугольная матрица. Тогда матрица C преобразуется к виду

$$\hat{C} = P [12E - 6Th + T^2h^2] P^{-1}.$$

На диагонали матрицы $[12E - 6Th + T^2h^2]$ стоят собственные числа матрицы C , равные

$$\tilde{\lambda}_i = [12 - 6\lambda_i h + \lambda_i^2 h^2].$$

Поскольку при любом i $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то все $\tilde{\lambda}_i$ имеют положительные вещественные части и, значит, матрица C является неособенной. Больше того, это положительно определенная матрица. $\odot$

Если матрица A не является устойчивой, то, вообще говоря, могут существовать такие значения h , при которых обращение в формуле (7) не существует. Однако в этом случае всегда можно выбрать достаточно малое h с тем, чтобы матрица $[12E - 6Ah + A^2h^2]$ имела обратную. Это следует из того, что $\lim [12E - 6Ah + A^2h^2] = 12E$ при $h \rightarrow 0$.

Устойчивость вычислений. Вычисления по формуле (7) считаются устойчивыми, если все характеристические числа матрицы располагаются внутри единичного круга комплексной плоскости (см., например, [17, [18]). В случае устойчивой матрицы A имеет место следующий факт:

Т е о р е м а 3. Если A — устойчивая матрица, то все характеристические числа матрицы $\Lambda = [12E - 6Ah + A^2h^2]^{-1} [12E + 6Ah + A^2h^2]$ по модулю меньше единицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой о треугольной форме матрицы. Пусть $A = PTP^{-1}$, где T — треугольная матрица, все элементы которой, расположенные под главной диагональю, равны нулю, а на диагонали размещены собственные числа матрицы A . Подставляя матрицу A в формулу для Λ и воспользовавшись формулами

$$PER^{-1} = E, \quad (PTP^{-1})^2 = PT^2P^{-1}, \quad (PXP^{-1})^{-1} = PX^{-1}P^{-1},$$

получим после элементарных алгебраических преобразований

$$\Lambda = P [12E - 6Th + T^2h^2]^{-1} [12E + 6Th + T^2h^2] P^{-1}.$$

Поскольку матрица T^2 — треугольная, то треугольными будут матрицы $[12E - 6Th + T^2h^2]$ и $[12E + 6Th + T^2h^2]$. Рассмотрим матрицу $[12E - 6Th + T^2h^2]^{-1}$. Она будет треугольной, как обращение треугольной матрицы,

а на ее главной диагонали будут стоять обратные величины собственных чисел матрицы $[12E - 6Th + T^2h^2]$ (см. задачу 1, § 8). Следовательно,

$$[12E - 6T + T^2]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12 - 6\lambda_1 h + \lambda_1^2 h^2} & * & \dots & * \\ 0 & \frac{1}{12 - 6\lambda_2 h + \lambda_2^2 h^2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{12 - 6\lambda_n h + \lambda_n^2 h^2} \end{bmatrix}.$$

(Здесь через * обозначены, возможно, ненулевые элементы матрицы). Отсюда сразу следует, что на диагонали треугольной матрицы (она равна произведению двух треугольных матриц) расположены числа

$$\bar{\lambda}_i = \frac{12 + 6\lambda_i h + \lambda_i^2 h^2}{12 - 6\lambda_i h + \lambda_i^2 h^2}.$$

Но все эти числа по модулю меньше единицы при любом $h > 0$ в силу того, что все характеристические числа λ_i имеют отрицательные вещественные части. ○

Таким образом, все сказанное о преимуществах формулы (4) в скалярном случае сохраняется и для матричного уравнения $\dot{x} = Ax$, по крайней мере для устойчивых матриц A .

Неоднородное уравнение. Способ получения формул типа (4), (6) остается без изменения для уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Пусть выбрано некоторое значение $h > 0$. Разложение функций $x(t+h)$ и $x(t)$ в ряд по степеням h имеет вид

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \frac{h}{1!} \dot{x}(t) + \frac{h^2}{2!} \ddot{x}(t) + \frac{h^3}{3!} \overset{...}{x}(t) + \\ &\quad + \frac{h^4}{4!} \overset{...}{x}(t) + O(h^5), \\ x(t) &= x(t+h) - \frac{h}{1!} \dot{x}(t+h) + \frac{h^2}{2!} \ddot{x}(t+h) - \\ &\quad - \frac{h^3}{3!} \overset{...}{x}(t+h) + \frac{h^4}{4!} \overset{...}{x}(t) + O(h^5). \end{aligned}$$

Вычтем, как и раньше, из первого уравнения второе, разделим полученное уравнение относительно $x(t+h)$, заменим все производные, воспользовавшись уравнением $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, отбросим члены порядка $O(h^5)$ и члены $\frac{A^4 h^4}{48} x(t)$ (проверьте, что отбрасывание этих членов не увеличивает ошибки аппроксимации). Тогда получим формулу, аналогичную формулам (4), (6), дающую решение неоднородного уравнения, с точностью до величин порядка $O(h^5)$:

$$\begin{aligned} x(t+h) = & \left[E - \frac{h}{2} A + \frac{h^2}{4} A^2 - \frac{h^3}{12} A^3 \right]^{-1} \times \\ & \times \left[E + \frac{h}{2} A + \frac{h^2}{4} A^2 + \frac{h^3}{12} A^3 \right] x(t) + \\ & + \left[E - \frac{h}{2} A + \frac{h^2}{4} A^2 - \frac{h^3}{12} A^3 \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \left[E + \frac{h}{2} A + \frac{h^2}{6} A^2 + \frac{h^3}{24} A^3 \right] \frac{h}{2} Bu(t) + \right. \\ & + \left[E - \frac{h}{2} A + \frac{h^2}{6} A^2 - \frac{h^3}{24} A^3 \right] \frac{h}{2} Bu(t+h) + \\ & + \left[E + \frac{h}{3} A + \frac{h^2}{12} A^2 \right] \frac{h^2}{4} B\dot{u}(t) - \\ & - \left[E - \frac{h}{3} A + \frac{h^2}{12} A^2 \right] \frac{h^2}{4} B\dot{u}(t+h) + \left[E + \frac{h}{4} A \right] \frac{h^2}{12} B\ddot{u}(t) + \\ & + \left. \left[E - \frac{h}{2} \right] \frac{h^2}{12} B\ddot{u}(t+h) + \frac{h^4}{48} Bu(t) - \frac{h^4}{48} B\ddot{u}(t+h) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь можно было бы воспользоваться результатом теоремы 1 и заменить множитель перед $x(t)$ матрицей A формулы (7). Однако эта замена не упрощает вычислений, поскольку множители перед $u(t)$ и $u(t-h)$ должны сохранить порядок h^3 для обеспечения точности $O(h^5)$.

Формулы (7), (8) содержат трудоемкую с точки зрения вычислений операцию — обращение матрицы. Поэтому нельзя априори оценить эффективность этих формул в сравнении с методами, не содержащими этой операции (например, метод Рунге — Кутты, суммирование ряда (*) и т. д.) Опыт, однако, показывает, что выигрыш, получаемый за счет повышенной точности формул (7), (8)

и за счет обеспечиваемой этими формулами устойчивости вычислений при любых h вполне компенсирует те вычислительные трудности, которые связаны с обращением матрицы. Хорошей иллюстрацией служит численный пример, приведенный в работе Дэвисона [57].

П р и м е р. Решение уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0,$$

где $u(t)$ — ступенчатое возмущение $u(t) = 1$ при $t \geq 0$, а матрицы A и B имеют следующие элементы: $A = [a_{ij}]$, где

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 0,05k^{i-1}, & i &= 1, 2, \dots, n, \\ a_{i+1,i} &= 0,005k^{i-1}, & i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ a_{i,i+1} &= 0,01, & i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ a_{ni} &= -0,02, & i &= 1, 2, \dots, n-2, \\ a_{in} &= 0,002, & i &= 1, 2, \dots, n-2, \end{aligned}$$

$k = 1,17$ при $n = 70$, $k = 1,25$ при $n = 50$, $k = 1,45$ при $n = 30$, $k = 3,0$ при $n = 10$, $B = [b_i]$, где $b_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$, $b_n = 1$, осуществлялось по формуле (8).

В табл. 1 приведен расход машинного времени при решении этой задачи данным методом, методом Рунге — Кутты и стандартным методом Кранка — Никольсона [56]. Автор работы [57] назвал алгоритм формулы (8) обобщенным методом Кранка — Никольсона.

Таблица 1 [57]

Порядок матрицы	Метод Рунге — Кутты	Стандартный метод Кранка — Никольсона [56]	Формула (8)
$n = 10$	40 мин	3 сек	0,2 сек
$n = 30$	360 мин*	33 сек	2,2 сек
$n = 50$	900 мин*	90 сек	10 сек
$n = 70$	1800 мин*	180 сек	26 сек

Отмеченные знаком * времена были оценены, а не измерены в эксперименте.

Шаг в методе Рунге — Кутта выбирался всегда максимально возможным по условию обеспечения устойчивости вычислений. Во всех случаях точность вычислений была не менее 4 значащих цифр.

Обсуждение. Отметим основные черты алгоритма (7).

1. Формула (6) дает корректное решение задачи при любых h (а не только при $h \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$. Учитывая этот факт и то обстоятельство, что формула (6) дает аппроксимацию порядка $O(h^5)$, можно надеяться, что решение уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ будет сравнительно точным при больших значениях h . Поэтому, если желаемая точность невелика (скажем, 0,1%), а это часто имеет место, то можно значительно сократить расход машинного времени, выбирая большие значения h .

2. Требуемый объем памяти при решении однородного уравнения составляет $3n^2$. Для неоднородного уравнения $5n^2$. Это более жесткие требования, чем те, которые предъявляют стандартные методы, основанные на суммировании ряда (*) — $2n^2$ или метода Рунге — Кутта — n^2 .

3. Алгоритм устойчив и сходится при любых h в том случае, если матрица A устойчива. Это, конечно, не означает, что в случае неустойчивой матрицы A этот алгоритм будет работать плохо. В этом случае следует обратить особое внимание на выбор h .

4. Основное время в этом алгоритме занимает операция обращения матрицы A . Поэтому важен выбор эффективного алгоритма решения этой задачи.

В § 3 нами был приведен алгоритм Гаусса, который может быть использован для вычисления обратной матрицы.

З а м е ч а н и е. Изложенный здесь метод вычисления значения экспоненты имеет давнюю историю. Впервые его применял Эйлер, который получил формулы (4), (6), разложив функцию e^x в бесконечную дробь. Тогда формулы (4), (6) представляют собой соответственно вторую и третью подходящие дроби для этой бесконечной дроби. Подробно этот метод описан в книге [45]. Для матричной экспоненты формулы типа (6) применены в работе [57]. В дальнейшем алгоритм (6) будет применен для решения алгебраического уравнения Ляпунова и для решения дифференциального уравнения Риккати.

Задачи. 1. Покажите, что формула

$$x(h) = \frac{120 + 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3}{120 - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3} x(0)$$

аппроксимирует решение уравнения $\dot{x} = Ax$ с точностью до величин порядка $O(h^2)$.

2. Докажите теоремы типа теоремы 2 и теоремы 3 для формулы задачи 1.

3. Приведите формулу (8) к удобному для программирования виду, воспользовавшись тем, что

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4$$

при $t \geq 0$ и $u(t) = 0$ при $t < 0$.

4. Упростите формулу (8) в случае $u(t) = \text{const}$, воспользовавшись формулой теоремы 1 так, чтобы порядок аппроксимации решения был $O(h^5)$.

ГЛАВА III

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

В этой главе мы приступим к изучению задач управления. Основной задачей, решаемой управляющим устройством, является задача обеспечения устойчивости движения управляемого объекта. Смысл этого требования в том, что объект должен сохранять работоспособность при действии различного рода посторонних возмущений. Установить, является ли движение данного объекта устойчивым даже в том случае, когда известны уравнения движения объекта и эти уравнения линейны, вообще говоря, очень сложно. Например, задача исследования устойчивости линейного объекта, уравнение которого имеет сравнительно простой вид

$$\ddot{x}(t) + (a + b \sin t) \dot{x}(t) = 0,$$

требует уже привлечения расчетов на ЦВМ.

Основной темой этой главы будет прямой метод Ляпунова. Этот мощный метод исследования применим для решения широкого круга вопросов теории управления. В согласии с планом этой работы мы ограничимся рассмотрением только линейных систем и только алгебраических методов исследования вопросов устойчивости в таких системах, оставляя без внимания имеющиеся эффективные частотные методы решения этих задач. В конце главы обсуждаются постановки задач аналитического конструирования систем управления.

§ 14. Описание линейных объектов в пространстве состояний

Определение линейной системы. Основным объектом исследования в дальнейшем будет «линейная система» или «линейный объект». Этими словами мы будем обозначать

систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \right\} \quad (1С)$$

В этих соотношениях $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ — векторы размерности n , m , p соответственно; $u(t)$ называется *входом системы, управлением, управляющим воздействием*; $y(t)$ — *выход системы, вектор выходных переменных, выходная величина*; $x(t)$ — *состояние системы, вектор фазовых координат, траектория движения системы или решение (системы дифференциальных уравнений)*. $u(t)$ — это то, что мы можем изменять по нашему усмотрению, чем мы управляем, что мы выбираем; $y(t)$ — следствие этих изменений, наблюдаемое на выходе системы.

Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ имеют размерность $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ соответственно. Элементы этих матриц — непрерывные функции времени.

Соотношение $y(t) = C(t)x(t)$ назовем *уравнением наблюдения* линейной системы или *уравнением выхода*.

З а м е ч а н и е. Уравнения выхода записывают иногда в более общем виде:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1)$$

где дополнительный член $Du(t)$ отражает прямую связь (не динамическую) выхода со входом. Все результаты, полученные для (1С), легко обобщаются для уравнения наблюдения (1). ☉

Если матрицы системы (1С) от времени не зависят, то такая система называется *стационарной*.

Многие вопросы теории управления, связанные с изучением математического объекта, заданного соотношениями (1С), не имеют аналогов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, прежде чем изучать математические свойства этого объекта, необходимо ввести терминологию и соответствующие понятия, которые устанавливали бы связь этой математической модели и реальных систем управления, изучаемых инженерными дисциплинами.

Множество значений вектора $x(t)$ называется *пространством состояний* и обозначается X . Для системы (1С) X совпадает с n -мерным пространством R^n .

Вектор $x(t)$ называется *состоянием системы* в момент времени t , а координаты этого вектора относительно какого-либо базиса, выбранного в пространстве состояний, называют *переменными состояния*.

Через T обозначим множество моментов времени, для которых рассматривается движение (ЛС). Обычно T совпадает с отрезком $t_0 \leq t \leq t_1$ или с полуинтервалом $t_0 \leq t \leq \infty$.

Пространство пар $(t, x(t))$ называют обычно *пространством событий* или *фазовым пространством* [24]. Точка $(t, x(t))$ называется *событием* или *фазой* системы (ЛС). Пространство событий представляет собой множество $T \times X$.

Если задана точка в пространстве событий $(t_0, x(t_0))$ и задано управление $u(t)$ для $t \geq t_0$, то решение уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ дается формулой Коши (см. § 10). Это решение можно рассматривать как отображение вида

$$x(t; t_0, x_0, u(t)): T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X.$$

Здесь Ω — пространство входных воздействий. Везде в дальнейшем в качестве входных воздействий рассматриваются непрерывные функции времени. Поэтому в качестве Ω мы возьмем пространство $C^m[t_0, t_1]$. Напомним, что $C^m[t_0, t_1]$ — пространство m -ок непрерывных функций. Это пространство является бесконечномерным.

Введем еще множество мгновенных значений управляющих воздействий U . В качестве этого множества будет рассматриваться пространство R^m . Заметим, что в качестве множества мгновенных значений управлений мы рассматриваем, вообще говоря, неограниченное множество.

Говорят, что входное воздействие $u(t)$ переносит, переводит, изменяет, преобразует состояние x_0 (или событие (t_0, x_0)) в состояние $x(t; t_0, x_0, u(t))$ (или в событие $(t; x(t; t_0, x_0, u(t)))$). Говоря о движении системы, мы будем иметь в виду изменение во времени ее состояния, т. е. функцию $x(t, t_0, x_0, u(t))$. *Размерность* линейной системы равна размерности ее пространства состояний, т. е. размерности пространства R^n .

Резюмируя сказанное, дадим определение математического объекта, изучаемого в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е 1. *Линейной системой* с непрерывным временем называется система, описываемая соотношениями (ЛС), где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ при любом $t \in T$; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ соответственно, составленные из непрерывных функций времени, $u(t)$ — непрерывная функция времени. $\odot$.

Поскольку бесконечномерные и дискретные системы здесь не рассматриваются, то в дальнейшем будем пользоваться термином *линейная система* или термином *линейный объект* для обозначения линейной, конечномерной, динамической системы с непрерывным временем.

Отметим основные моменты идеализации реальных физических систем, допущенные в этом определении.

1. Предполагается, что все матрицы системы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ точно известны. В реальных системах это выполняется редко. Как правило, можно говорить лишь о большей или меньшей степени точности задания этих матриц, а не об их точном знании. Итак, рассматриваются только детерминированные системы.

2. Мы рассматриваем линейные уравнения. Реальные системы описываются, как правило, нелинейными уравнениями. Однако исследование линейных систем имеет важное значение по следующим причинам: а) имеется много динамических систем, движение которых описывается с помощью линейных уравнений, — это линейные электрические цепи, механические системы, изучаемые в классической механике, линейные объекты регулирования и т. д.; б) линейная теория имеет законченный вид, разработаны достаточно эффективные численные методы решения линейных задач; в) с помощью линейной теории можно изучать нелинейные динамические системы в окрестности их номинальных траекторий. Таким образом, линейная теория служит основой для изучения нелинейных систем.

3. Поскольку в качестве управляющих воздействий рассматриваются непрерывные функции времени $u(t) \in \mathbb{C}^m [t_0, t_1]$, то это значит, во-первых, что управляющие воздействия в системе могут быть больше любой наперед заданной конечной величины, во-вторых, что не допускаются скачки в управляющих воздействиях. В реальных системах управление всегда ограничено и часто допу-

стимы управляющие воздействия типа скачков (переключений и т. п.).

Несмотря на подобную идеализацию свойств реальных систем, теория управления линейными системами приводит к результатам, имеющим непосредственное практическое применение.

Понятие состояния. Вектор $x(t_0)$ содержит всю информацию, необходимую для однозначного определения выходов системы (ЛС) в любой момент времени $t \geq t_0$ в том случае, если известны входные воздействия $u(t)$ при $t \geq t_0$. Поскольку входами $u(t)$ мы распоряжаемся, то для эффективного управления линейным объектом необходимо знать (уметь оценивать, предсказывать, измерять) его состояние. Именно это обстоятельство положено в основу определения состояния систем самого общего вида [20, 24]. В нашем частном случае, когда состояние в момент t_0 определено как полный набор начальных условий в уравнениях движения, знание состояния и входов системы однозначно определяет ее движение лишь при отсутствии помех. Если же система подвержена действию помех или если в системе имеется запаздывание, то начальные условия и входы уже не определяют однозначно движение системы (ЛС).

Рассмотрим примеры выбора переменных состояния динамических систем.

Если к механической частице (система) приложить в момент времени t_0 силу (вход), то движение частицы (выход) для $t \geq t_0$ нельзя определить однозначным образом, если не известны ее положение и скорость в начальный момент времени. Поэтому скорость и положение являются *переменными состояния* этой системы.

Заметим, что переменные состояния определяются не однозначно. Например, момент количества движения и положение частицы тоже будут переменными состояниями.

В классической механике, если выбран набор обобщенных координат механической системы и известны их производные, то движение системы при известных силах определяется однозначно. Обобщенные координаты вместе с их производными определяют состояние системы в фазовом пространстве размерности $2n$.

Таким образом, понятие фазового пространства классической динамики естественным образом преобразуется

в понятие пространства состояний в теории управления. Напомним, что выбор обобщенных координат динамической системы отнюдь не является однозначным.

Рассмотрим электрическую цепь рис. 14.1. Известно, что если задан начальный ток в индуктивности и начальное напряжение на емкости, то для любого закона

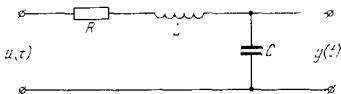


Рис. 14.1.

$u(t)$ изменения входного напряжения выходное напряжение $y(t)$ можно определить единственным способом. Поэтому ток в индуктивности и напряжение на емкости можно рассматривать в качестве переменных состояния. В цепи рис. 14.2, если известны все напряжения на емкостях, которые мы обозначим через x_1, x_2, x_3 , то поведение цепи единственным образом определено для любого

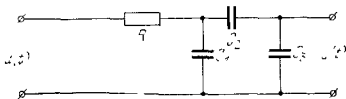


Рис. 14.2.

входного воздействия. Поэтому напряжения на емкостях x_1, x_2, x_3 можно рассматривать как переменные состояния.

Рассмотрим, однако, эту цепь подробнее. По закону Кирхгофа имеем $x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) = 0$ для всех t . Поэтому, если любые два напряжения из $\{x_1, x_2, x_3\}$ известны, то третье определяется однозначно. Другими словами, два напряжения на емкостях тоже являются состоянием. Если же в качестве состояния выбраны все три напряжения, то имеется избыточность в определении состояния. Естественно так стремиться выбирать состояние системы, чтобы оно содержало бы наименьшее число переменных.

Как указывалось выше, выбор переменных состояния не является единственным. Фактически путем замены базиса в пространстве состояний можно ввести новые переменные состояния, поэтому существует бесчисленное число способов выбрать эти переменные. Обычно употребляются лишь некоторые из этих способов, либо те, которые дают математические преимущества в исследовании модели системы, либо те, которые имеют ясный физический смысл.

Уравнения состояния и передаточная функция. Основным понятием теории регулирования является понятие передаточной функции. В дальнейшем будем решать задачи управления линейными объектами, используя их описание в пространстве состояний. В рамках этого подхода решение ряда традиционных вопросов теории управления выглядит существенно проще. Кроме того, матричное описание систем удобно с точки зрения использования вычислительных методов алгебры и программирования задач на ЦВМ.

На рис. 14.3, а дано графическое изображение системы с одним входом и одним выходом, описанной с помощью

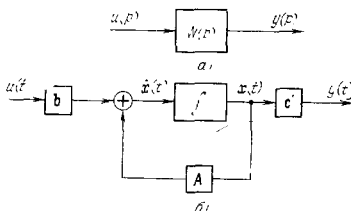


Рис. 14.3.

передаточной функции $W(p)$, а на рис. 14.3, б — с помощью уравнений состояния (ЛС).

При сравнении описания системы в пространстве состояний и описания с помощью передаточной функции возникает вопрос: когда эти описания эквивалентны? Связанный с этим вопрос: как перейти от одного описания к

другому? По этому поводу заметим следующее. Поскольку передаточная функция отражает только соотношение между входом и выходом системы, всегда имеется определенный произвол в выборе переменных состояния системы, заданной с помощью передаточной функции. С другой стороны, если известно описание системы в пространстве состояний, то передаточная функция сразу определяется, и притом однозначным образом. Тот факт, что описанию системы в пространстве состояний отвечает единственная передаточная функция, а передаточной функции системы соответствует бесконечно много представлений в пространстве состояний, свидетельствует о том, что описание системы в пространстве состояний является более общим. Вычислим передаточную функцию стационарной системы с одним входом и одним выходом. Предположив, что начальные условия равны нулю, возьмем преобразование Лапласа обоих уравнений (ЛС):

$$\begin{aligned} p\mathbf{x}(p) &= A\mathbf{x}(p) + \mathbf{b}u(p), \\ y(p) &= \mathbf{c}'\mathbf{x}(p). \end{aligned}$$

Из первого уравнения, предполагая существование обратной матрицы, имеем

$$\mathbf{x}(p) = [pE - A]^{-1} \mathbf{b}u(p).$$

Отсюда сразу получим

$$y(p) = \mathbf{c}' [pE - A]^{-1} \mathbf{b}u(p).$$

Коэффициент перед $u(p)$ равен передаточной функцией системы. Следовательно,

$$W(p) = \mathbf{c}' [pE - A]^{-1} \mathbf{b}.$$

Рассмотренный прямой метод не всегда пригоден для практического использования, поскольку требует вычисления обращения матрицы. Проще получить передаточную функцию, преобразуя структурную схему системы (ЛС). Пример такого преобразования для системы, заданной матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [1 \ 0],$$

представлен на рис. 14.4.

При большой размерности пространства состояний процедура вычисления передаточной функции с помощью структурных преобразований может быть существенно проще, чем операция обращения матрицы большого порядка.

Задача определения представления системы в пространстве состояний по известной передаточной функции

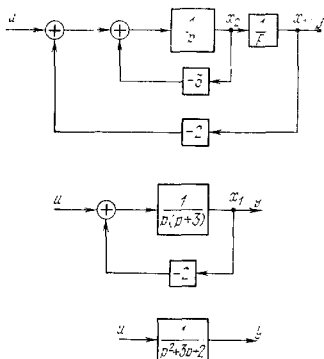


Рис. 14.4.

является более сложной, чем обратная задача, из за произвола выбора переменных состояний. Однако с этой задачей знаком каждый инженер, которому приходится моделировать системы регулирования на аналоговых ЭВМ. Рассмотрим решение этой задачи для системы с одним входом и одним выходом, имеющей передаточную функцию вида

$$W(p) = \frac{h_{n-1}p^{n-1} + h_{n-2}p^{n-2} + \dots + h_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}.$$

Соответствующее этой передаточной функции дифференциальное уравнение движения системы можно

Если в качестве выхода системы рассматривать положение частицы x_1 , то $y = x_1$ и матрицы системы A , B , C имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0].$$

Уравнения системы в подробной записи:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Структурная схема этого объекта представляет собой два последовательно включенных интегратора (рис. 14.6).

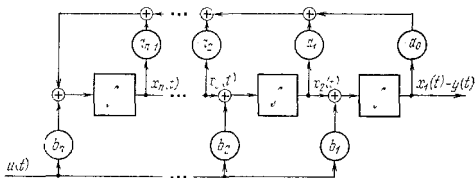


Рис. 14.5.

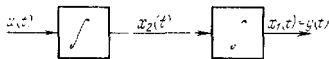


Рис. 14.6.

2. Рассмотрим камерную нагревательную печь, разделенную на три зоны регулирования. Пусть температура каждой из зон x_i ($i = 1, 2, 3$) связана с расходом топлива в зоне $u_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) уравнением

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + b_{i1} u_1(t) + b_{i2} u_2(t) + b_{i3} u_3(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь коэффициенты b_{ij} описывают влияние расхода топлива j -й зоны на температуру в i -й зоне.

Тогда уравнения этого объекта могут быть представлены в виде (ЛС), где

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы считаем, что все переменные состояния объекта

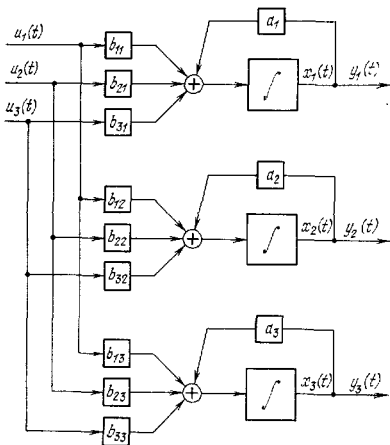


Рис. 14.7.

известны в качестве выходных величин. Поэтому матрица C является единичной матрицей. Структурная схема этого объекта представлена на рис. 14.7.

3. Рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис. 14.8. Выпишем уравнения Кирхгофа для этой цепи:

$$\begin{aligned} i_1(t) - i_2(t) &= C_1 \frac{du_{C_1}(t)}{dt}, \\ L_1 \frac{di_1(t)}{dt} &= u(t) - Ri_1(t) - u_{C_1}(t), \\ L_2 \frac{di_2(t)}{dt} &= u_{C_1}(t), \end{aligned}$$

где $u_{C_1}(t)$ — напряжение на емкости. Вводя обозначения: $x_1 = u_{C_1}(t)$, $x_2 = i_1(t)$, $x_3 = i_2(t)$, получим уравнения

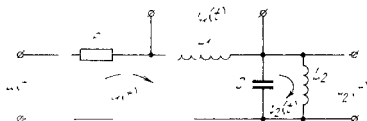


Рис. 14.8.

движения линейной системы в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задачи. 1. Выпишите уравнения состояния в форме (ЛС) для систем, представленных на рис. 14.9. Выпишите функцию Лагранжа и уравнения Лагранжа для этих систем

2. Получите представление систем с передаточными функциями

$$\text{а) } W(p) = \frac{k(p+1)}{p^2+p+1}, \quad \text{б) } W(p) = \frac{k(p^2+2p+1)}{p^4+p^3+2p^2+p+1}$$

в пространстве состояний

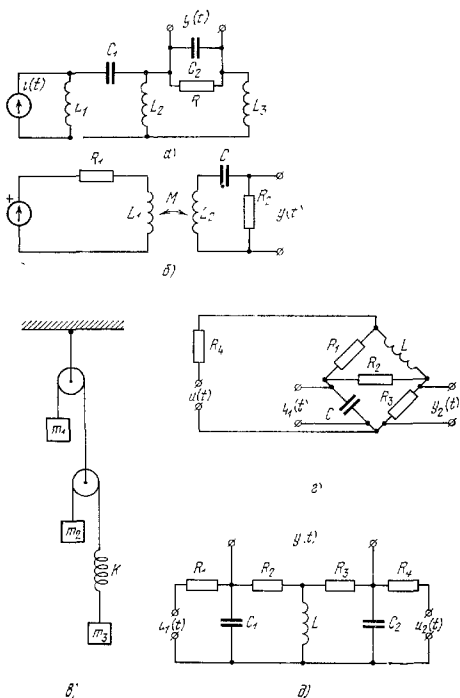


Рис. 14.9.

§ 15. Устойчивость

Под устойчивостью состояния равновесия динамической системы понимают ее способность возвращаться в это состояние после исчезновения внешних сил, которые вывели систему из равновесия. Под устойчивостью движения динамической системы понимают обычно такое свойство этого движения, когда малые отклонения начальных условий приводят к малым отклонениям от начальной траектории движения. Теория положений устойчивого равновесия динамических систем была в основных чертах завершена Лагранжем в его «Аналитической механике», изданной в 1788 г.

Строгое определение понятия устойчивости движения было впервые дано А. М. Ляпуновым в его знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения», опубликованной в 1892 г. Предложенные в этой работе методы исследования задач устойчивости оказались чрезвычайно плодотворными. По-видимому, не будет преувеличением сказать, что идеи этой работы в значительной степени предопределили основные результаты современной теории аналитического конструирования систем управления.

В дальнейшем, поскольку мы будем рассматривать только линейные динамические системы, то термины: движение системы, траектория движения, решение системы дифференциальных уравнений — будем считать эквивалентными. Норма вектора $x(t)$ и норма матрицы A всегда индуцированы скалярными произведениями в евклидовых пространствах E^n и $E^{n \times n}$ (см. § 8).

Устойчивость движения по Ляпунову. Дадим определение устойчивости движения по Ляпунову.

О п р е д е л е н и е 1. Решение $x(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$$

называется *устойчивым по Ляпунову* или просто *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что при любом $x_1(t_0)$, удовлетворяющем условию

$$\|x_1(t_0) - x(t_0)\| \leq \delta,$$

справедливо неравенство

$$\|x_1(t) - x(t)\| < \varepsilon \text{ при всех } t \in [t_0, \infty). \quad \odot$$

О п р е д е л е н и е 2. Устойчивое решение $x(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \rightarrow x(t). \quad \odot$$

Согласно данному определению для любой ε окрестности устойчивого решения $x(t)$ (так как эта окрестность задана при всех $t_0 \leq t < \infty$, то можно говорить о заданной «трубке» траекторий системы), как бы мала эта окрестность ни была, всегда существует такая δ -окрестность начальных условий, что любое решение $x(t)$, начинающееся в этой окрестности, не выйдет из ε -окрестности траектории $x(t)$ при всех t .

Для асимптотически устойчивого решения любое решение, начинающееся в δ -окрестности начальных условий, будет асимптотически сближаться с решением $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Пример просто устойчивой системы: $\dot{x}(t) + x(t) = 0$. Система $\dot{x}(t) + x(t) = 0$, очевидно, асимптотически устойчива, а система $\dot{x}(t) - x(t) = 0$ - неустойчива.

Обратите внимание на то, что устойчивость (даже асимптотическая) решения неоднородной системы вовсе не предполагает ограниченности этого решения. Например, решение уравнения $\dot{x}(t) - x(t) + 1 = t$ при $0 \leq t < \infty$, которое имеет вид $x(t) = x(0)e^{-t} + t$, является асимптотически устойчивым при $t \rightarrow \infty$, но неограниченным. В то же время, поскольку в определении устойчивости «возмущение» траектории движения задано в начальный момент времени, а согласно формуле Коши вектор начальных условий x_0 входит в решение аддитивно в виде члена $\Phi(t, t_0)x_0$, то устойчивость системы целиком определяется свойствами переходной матрицы и справедлива

Т е о р е м а 1. Для устойчивости (асимптотической устойчивости) всех решений линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$$

необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво (асимптотически устойчиво) какое либо (например, тривиальное $x(t) \equiv 0$) решение однородного уравнения.

Доказательство. Оно сразу следует из формулы Коши и определений 1, 2.

Устойчивость и переходная матрица. Таким образом, исследование вопроса устойчивости линейной неоднородной системы сводится к исследованию решения однородной системы, которое целиком определяется матрицей системы $A(t)$ и имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0),$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица, соответствующая матрице $A(t)$.

Рассмотрим три возможных случая.

1. $\Phi(t, t_0)$ — ограниченная матрица в интервале $[t_0, \infty)$, т. е. существует такое число M , что

$$|\Phi_{ij}(t, t_0)| \leq M \quad (t \geq t_0, i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь через $\Phi_{ij}(t, t_0)$ обозначен ij -й элемент переходной матрицы. В этом случае из формулы $x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0)$ следует, что

$$\|x(t)\| \leq n^2 M \max_i |x_i(t_0)|$$

и условие устойчивости выполняется, если взять, например, $\delta < \frac{\varepsilon}{n^2 M}$. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво.

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0) = 0$. В этом случае матрица $\Phi(t, t_0)$ ограничена в интервале $t_0 \leq t < \infty$ и потому, как уже было выяснено, движение устойчиво. Кроме того, из вида решения следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0) x_0 = 0$$

при любом x_0 . Движение асимптотически устойчиво.

3. $\Phi(t, t_0)$ — неограниченная матрица в интервале $t_0 \leq t < \infty$. Это означает, что по крайней мере одна из функций $\Phi_{ij}(t, t_0)$, например, $\Phi_{qr}(t, t_0)$, не ограничена в интервале $t_0 \leq t < \infty$. Возьмем начальные условия $x_{10} = 0, \dots, x_{p0} \neq 0, \dots, x_{n0} = 0$. Тогда

$$x_q(t) = \Phi_{qr}(t, t_0) x_{p0},$$

и каким бы малым по модулю ни было x_{p0} , функция $x_q(t)$ будет неограничена. Движение неустойчиво. $\odot$

Исследование переходной матрицы позволяет, таким образом, решить вопрос об устойчивости системы. Однако переходную матрицу не всегда просто получить, и чаще всего необходимо вывести суждение об устойчивости по матрице $A(t)$.

Устойчивые стационарные матрицы. Если известен спектр постоянной матрицы A , то вопрос о ее устойчивости (асимптотической устойчивости) решает

Т е о р е м а 2.1°. Нулевое решение линейной системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$ является устойчивым по Ляпунову, если 1) все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные или нулевые вещественные части, 2) все характеристические числа с нулевыми вещественными частями (если таковые имеются) являются простыми (не кратными) корнями минимального многочлена матрицы A , и неустойчивым, если хотя бы одно из условий 1), 2) не выполняется.

2°. Нулевое решение линейной системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$ является асимптотически устойчивым в том и только в том случае, когда все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем только вторую часть этой теоремы, поскольку главным образом нас будут в дальнейшем интересовать асимптотически устойчивые системы. Доказательство первой части можно найти в книгах [13, 19]. Пусть все характеристические числа матрицы A удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Напомним, что для любой матрицы A существует неособенная матрица P такая, что матрица $P^{-1}AP = Q$ имеет треугольную форму (теорема 2 § 7). На главной диагонали матрицы Q расположены собственные числа матрицы A : $q_{11} = \lambda_1$, $q_{22} = \lambda_2, \dots, q_{nn} = \lambda_n$, элементы под главной диагональю равны нулю. После замены переменных $z(t) = P^{-1}x(t)$ система для $z(t)$ имеет вид

$$\dot{z}(t) = P^{-1}APz(t) = Qz(t).$$

Запишем эту систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= q_{11}z_1(t) + q_{12}z_2(t) + \dots + q_{1n}z_n(t), & z_1(0) &= z_{10}, \\ \dot{z}_2(t) &= \dots & q_{22}z_2(t) + \dots + q_{2n}z_n(t), & z_2(0) = z_{20}, \\ &\dots & \dots & \dots \\ \dot{z}_n(t) &= \dots & q_{nn}z_n(t), & z_n(0) = z_{n0}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $z_n(t) = z_{n0}e^{q_{nn}t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поскольку по предположению $\operatorname{Re} q_{nn} < 0$. Подставляя $z_n(t)$ в $(n-1)$ -е уравнение и интегрируя его, найдем $z_{n-1}(t)$. Решение $z_n(t)$ и $z_{n-1}(t)$ подставим в $(n-2)$ -е уравнение и т. д. Осуществляя эту процедуру, нам придется решать на каждом шаге скалярное уравнение вида

$$z_i(t) = q_{ii}z_i(t) + f(t), \quad z_i(0) = z_{i0},$$

где $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Решение этого уравнения даст формула Коши

$$z_i(t) = z_{i0}e^{q_{ii}t} + e^{q_{ii}t} \int_0^t e^{-q_{ii}s} f(s) ds.$$

Отсюда видно, что $z_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поскольку $\operatorname{Re} q_{ii} < 0$. Таким образом, $z_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, и достаточность условий теоремы доказана. Необходимость получается сразу, если предположить противное $\odot$.

Напомним, что постоянная матрица A , все характеристические числа которой имеют отрицательные вещественные части, называется *устойчивой* матрицей. Согласно доказанной теореме устойчивая матрица определяет асимптотически устойчивую систему.

О п р е д е л е н и е 3. Для любой устойчивой матрицы A число $\alpha > 0$, определенное равенством

$$\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} \lambda_i = -\alpha,$$

называется *степенью устойчивости*. $\odot$

Этот показатель характеризует скорость затухания переходного процесса в линейной системе.

Критерий Рауса — Гурвица. Характеристический многочлен устойчивой матрицы называют *устойчивым* *многочленом* или *многочленом Гурвица*. Нетрудно проверить, что если

$$\Phi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

— многочлен Гурвица, то все его коэффициенты строго положительны, т. е. $a_i > 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться тео-

ремой Виета, согласно которой $\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$, и

заметить, что если λ_i — комплексный корень, то сопряженное число $\bar{\lambda}_i$ тоже является корнем этого полинома. Поскольку $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, то все сомножители вида $(\lambda - \lambda_i)$, где λ_i — вещественный корень, и сомножители вида $(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \bar{\lambda}_i)$, где λ_i — комплексный корень, вообще не содержат отрицательных коэффициентов. Условие положительности всех коэффициентов является необходимым, но не достаточным условием.

Рассмотрим матрицу $n \times n$, составленную из коэффициентов характеристического полинома $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

называемую *матрицей Гурвица*. На главной диагонали этой матрицы расположены коэффициенты характеристического многочлена, начиная с a_1 до a_n . Нечетные столбцы содержат коэффициенты с нечетными индексами, а четные — с четными. Все коэффициенты с индексами, большими n или меньшими 0, заменяются нулями. В каждой строке индексы расположены в порядке убывания.

Если задана строка коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, 1$, то матрицу Гурвица можно получить, если каждую последующую строку образовать из исходной сдвигом на два такта вправо и затем выделить квадратную матрицу порядка n , так чтобы в последней строке был единственный элемент a_n . Для многочлена 5-го порядка имеем

$$H = \begin{bmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим еще, что матрицу H можно строить, используя лишь первые два столбца. Для построения необходимо каждые последующие два столбца заменять предыдущими, сдвигая их на одну строку вниз.

Приведем матрицу Гурвица к треугольному виду с помощью следующих преобразований, не меняющих знаков ее диагональных миноров. Вычтем из второго, четвертого, . . . столбца соответственно первый, третий, . . . столбцы, предварительно помноженные на $\frac{1}{a_1}$. Нетрудно видеть, что в полученной матрице элементы которой мы обозначим через c_{ij} , все элементы первой строки, кроме первого, суть нули. Снова преобразуем ее, вычитая из третьего, пятого, . . . столбца соответственно второй, четвертый, . . . столбец, предварительно помноженные на c_{23}/c_{22} . В полученной матрице все элементы первых двух строк, расположенные правее диагональных, равны нулю. Продолжая этот процесс далее, мы придем к треугольной матрице n -го порядка, называемой *матрицей Рауса*:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ r_{12} & r_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

называются *определителями Гурвица*.

Коэффициенты, стоящие на главной диагонали матрицы Рауса, связаны с определителями Гурвица соотношениями

$$r_{11} = \Delta_1, \quad r_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad r_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots \quad (1)$$

или, что то же самое,

$$\Delta_1 = r_{11}, \quad \Delta_2 = r_{11} r_{22}, \dots, \Delta_n = \prod_{i=1}^n r_{ii}.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости многочлена формулирует

Т е о р е м а 3 (Раус, Гурвиц). Для того чтобы многочлен $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительными, или чтобы были положительными все диагональные элементы матрицы Рауса R . $\odot$

В следующем параграфе приведена схема алгебраического доказательства этой теоремы. Другие доказательства приведены в книгах [4], [43].

Заметим, что рассмотренные критерии требуют определения спектра матрицы, либо знания коэффициентов ее характеристического полинома. Как та, так и другая задача могут оказаться сложными в вычислительном плане. Поэтому важно иметь подход, который позволил бы оценивать устойчивость матрицы, минуя вычисление коэффициентов ее характеристического полинома. Такой подход связан с прямым методом Ляпунова, которому посвящен следующий параграф.

Нестационарные матрицы. Если система — нестационарная, то задача исследования устойчивости матрицы $A(t)$ в общем случае не может быть сведена к существенно менее сложной задаче, чем задача вычисления переходной матрицы. Исследование устойчивых нестационарных матриц связано с рядом тонких вопросов.

Казалось бы, естественное условие $\lambda^+(t) \leq -h$, где $h > 0$, а $\lambda^+(t)$ — максимальное собственное значение матрицы $A(t)$, не обеспечивает устойчивости нестационарной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Об этом свидетельствует следующий простой пример.

Рассмотрим пару матриц

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стационарная система $\dot{x}(t) = Ax(t)$ очевидно неустойчива, так как матрица A имеет положительное собственное значение $\lambda = 1$. Вместе с тем нетрудно проверить, что матрица e^{Bt} является матрицей Ляпунова (см. § 11) и преобразование Ляпунова $z(t) = e^{Bt}x(t)$ приводит систему $\dot{x}(t) = Ax(t)$ к виду

$$\dot{z}(t) = [e^{Bt} A e^{-Bt} + B] z(t).$$

Поскольку $x(t)$ не ограничено, то $z(t) = e^{Bt}x(t)$ тоже не ограничено (это сразу следует из свойств матрицы

Ляпунова e^{Bt}), и полученная система по-прежнему неустойчива. Вместе с тем характеристические числа матрицы этой системы $[e^{Bt}Ae^{Bt} + B]$ (убедитесь в этом, проведя соответствующие вычисления) отрицательны и не зависят от t . Приведем простое достаточное условие асимптотической устойчивости матрицы $A(t)$.

Теорема 4. Для того чтобы линейная система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ была асимптотически устойчивой при $t_0 \leq t < \infty$, достаточно выполнения условия $\lambda^+(t) \leq -h < 0$ при $t_0 \leq t < \infty$, где h — произвольная положительная постоянная, $\lambda^+(t)$ — максимальное собственное значение симметрической матрицы $[A(t) + A'(t)]$.

Доказательство. Согласно теореме 9 § 8 о собственных значениях симметрической матрицы, при любом t имеет место неравенство

$$x'(t)[A(t) + A'(t)]x(t) \leq \lambda^+(t) x'(t)x(t).$$

В силу очевидного тождества

$$\frac{d}{dt}(x'(t)x(t)) = \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = x'(t)[A'(t) + A(t)]x(t)$$

это неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 \leq \lambda^+(t)\|x(t)\|^2.$$

Поделив обе части этого неравенства на $\|x(t)\|^2 > 0$ и интегрируя в интервале $[t_0, t]$, получим

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda^+(t) dt \right\}.$$

Поскольку в силу условий теоремы $\lambda^+(t) \leq -h < 0$, имеем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Система асимптотически устойчива. $\odot$

Устойчивость приводимых систем. Важным классом нестационарных систем, для которых исследование устойчивости сводится к стационарному случаю, являются приводимые системы, для которых имеет место следующая

Теорема 5. Для того чтобы приводимая система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы была устойчивой соответствующая этой системе стационарная матрица.

Доказательство. Согласно теореме Еругина решение приводимой системы имеет вид

$$x(t) = P(t) e^{B(t-t_0)} P^{-1}(t_0) x(t_0),$$

где $P(t)$ — матрица Ляпунова, а B — постоянная матрица. Поскольку матрица Ляпунова при любых $t_0 \leq t < \infty$ удовлетворяет условию $\|P(t)\| \leq M_1$, $\|P^{-1}(t)\| \leq M_2$, а $e^{B(t-t_0)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в силу устойчивости матрицы B , то достаточность условий теоремы получается сразу. Необходимость этих условий немедленно получим, если предположим противное. $\odot$

Важным частным случаем приводимых систем являются системы с периодическими коэффициентами (см. § 11). Для периодической системы переходная матрица согласно теореме Флоке — Ляпунова имеет вид

$$\Phi(t, t_0) = P^{-1}(t) e^{B(t-t_0)} P(t_0),$$

где $P(t)$ — периодическая матрица, а B — постоянная матрица. Таким образом, асимптотическое поведение периодической системы определяется собственными числами матрицы B . Чтобы вычислить матрицу B , необходимо решить уравнение

$$\Phi(t_0 + T, t_0) = e^{BT}$$

относительно B , где T — период матрицы $A(t)$. Это вычисление провести совсем непросто. К счастью, при исследовании устойчивости этого можно и не делать. Нетрудно видеть, что если B имеет собственные значения λ_i , то числа $e^{\lambda_i T}$ будут собственными значениями постоянной матрицы $\Phi(T + t_0, t_0)$. Это замечание позволяет сформулировать условие асимптотической устойчивости для линейной периодической системы в терминах собственных чисел матрицы $\Phi(T + t_0, t_0)$.

Т е о р е м а 6. Система с периодическими коэффициентами

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t), \quad A(t + T) = A(t)$$

асимптотически устойчива, т. е. все ее решения стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, если все собственные значения матрицы $\Phi(t_0 + T, t_0)$ лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, т. е. $|\lambda_i| < 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. $\odot$

Необходимые и достаточные условия того, что корни характеристического полинома располагаются внутри единичного круга, можно получить из критерия Рауса—Гурвица. Действительно, нетрудно видеть, что корни полинома

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

располагаются внутри единичного круга тогда и только тогда, когда корни полинома

$$\psi(\lambda) = \varphi\left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right](1-\lambda)^n$$

располагаются слева от мнимой оси. Поэтому для выяснения условий устойчивости периодической системы можно использовать критерий Рауса—Гурвица.

Равномерная асимптотическая устойчивость. Уравнение $\dot{x}(t) = -1/t x(t)$, имеющее переходную матрицу вида $\Phi(t, t_0) = t_0/t$, является очевидно асимптотически устойчивым, так как $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако по заданному числу $\varepsilon > 0$ выбор $\delta > 0$ в определении устойчивости будет зависеть от начального момента времени t_0 : $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$. Если число $\delta > 0$ в определении асимптотической устойчивости можно выбрать не зависящим от начального момента времени t_0 , то такая устойчивость называется *равномерной асимптотической устойчивостью*. Для равномерно асимптотически устойчивой системы оценки ее асимптотического поведения на бесконечности можно выбрать вне зависимости от начального момента времени.

Этот вид устойчивости представляет значительный практический интерес при исследовании нестационарных систем.

При равномерной асимптотической устойчивости норма переходной матрицы экспоненциально убывает на бесконечности, о чем свидетельствует

Теорема 7. Нулевое решение уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ равномерно асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные α, β такие, что при $t \geq t_0$ выполнено условие

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы сразу следует из неравенства

$$\|x(t)\| - \|\Phi(t, t_0)x(t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x(t_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \|x(t_0)\|.$$

Докажем необходимость. Пусть нулевое решение системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ равномерно асимптотически устойчиво, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\|x(t)\| \leq \varepsilon$, коль скоро $\|x(t_0)\| \leq \delta$ при любом t_0 . Значит,

$$\varepsilon \geq \|x(t)\| < \|\Phi(t, t_0)\| \|x(t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \delta$$

и

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \varepsilon \delta^{-1}. \quad (2)$$

Кроме того, в силу равномерной асимптотической устойчивости по t всегда найдется такое $T > 0$, что

$$\|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \leq 1/2 \text{ при любых } t_0.$$

Используя очевидное неравенство

$$\|\Phi(t_0, t)\| \leq \|\Phi(t_0, t_1)\| \|\Phi(t_1, t)\|,$$

получим

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_0 + nT, t_0)\| &\leq \|\Phi(t_0 + nT, t_0 + (n-1)T)\| \dots \\ &\dots \|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \leq 2^{-n}. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (2) и замечая, что $2^{-n} = e^{-n \ln 2}$, получим $\|\Phi(t, t_0)\| \leq \delta^{-1} e^{-\frac{\ln 2}{T}(t-t_0)}$, $t \geq t_0$ при всех t_0 . $\odot$ Если для линейной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ найдутся положительные постоянные α и β такие, что $\|x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}$ при $t \geq t_0$, то система называется *экспоненциально устойчивой*. В силу доказанной теоремы 7 экспоненциальная устойчивость эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости. В формулировке теорем 4–6 требование асимптотической устойчивости можно заменить требованием равномерной асимптотической устойчивости. Доказательство теоремы 4 останется без изменений, а теоремы 5 и 6 останутся справедливыми в силу свойств преобразований Ляпунова.

Задачи. 1. Вычислите максимальное собственное значение $\lambda^+(t)$ для матриц:

$$A(t) = [e^{Bt} C e^{-Bt} + B] \text{ и } [A(t) + A'(t)],$$

если

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Устойчива ли матрица $A(t)$?

2. Пусть $A(t) = A^*(t)$ — непрерывная ограниченная матрица и $\lambda^+(t)$ — ее максимальное собственное значение. Покажите, что если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\int_{t_0}^t \lambda^+(t) dt \leq \varepsilon(t - t_0) \text{ при любых } t, t_0, t \geq t_0,$$

то уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ является равномерно асимптотически устойчивым.

3. При каких значениях α, β полиномы

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 3, \quad \psi(\lambda) = \lambda^4 + \alpha\lambda^3 + 2\lambda^2 + \beta\lambda + 1$$

устойчивы?

4. Является ли система

$$\dot{x}(t) = -\frac{2}{1+t} x(t)$$

экспоненциально устойчивой?

5. Покажите, что если $A(t)$ — непрерывная матрица, ограниченная на $(-\infty, +\infty)$, то выполнение неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t, t_0)\| dt \leq k \text{ для всех } t_1 \geq t_0$$

эквивалентно равномерной асимптотической устойчивости системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

6. Докажите равенства (1).

7. Покажите, что уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, где

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 1,$$

не является равномерно асимптотически устойчивым в области $[t_0, \infty)$, хотя его решения и ограничены.

§ 16. Второй метод Ляпунова

Теорема Ляпунова. Вторым или прямой метод Ляпунова позволяет построить эффективные достаточные условия, выполнение которых гарантирует устойчивость решений дифференциальных уравнений. Этот метод применяется при исследовании самых различных систем диф-

дифференциальных уравнений, линейных и нелинейных, в обыкновенных и частных производных. При исследовании устойчивости движения прямым методом Ляпунова задача сводится к построению некоторых скалярных функций координат системы и времени — функций Ляпунова, аналогичных функции энергии в механике. Для линейных объектов мы ограничимся рассмотрением функций Ляпунова в виде квадратичных форм. Начнем со стационарного случая. Здесь формулировку необходимых и достаточных условий устойчивости матрицы A дает следующая

Т е о р е м а 1 (Ляпунова). *Для того чтобы матрица A была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $A'V + VA = -W$ имело положительно определенное решение при любой положительно определенной матрице W .*

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть V — единственное положительно определенное решение уравнения $A'V + VA = -W$, где W — симметрическая положительно определенная матрица. Проверьте, что предположение о симметричности матрицы W не нарушает общности рассуждений. Для сокращения записи введем обозначения: $v(t) = x'(t) V x(t)$, $w(t) = x'(t) W x(t)$. Тогда в силу уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \dot{x}'(t) V x(t) + x'(t) V \dot{x}(t) = x'(t)(A'V + VA)x(t) = \\ &= -x'(t) W x(t) = -w(t). \end{aligned}$$

Так как матрицы W и V симметричны и положительно определены, то для любого x в силу теоремы 9 § 8 имеют место оценки

$$\begin{aligned} \lambda^-(W) \|x\|^2 &\leq w(t) \leq \lambda^+(W) \|x\|^2, \\ \lambda^-(V) \|x\|^2 &\leq v(t) \leq \lambda^+(V) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что

$$-w(t) \leq \frac{\lambda^-(W)}{\lambda^+(V)} v(t),$$

где $\lambda^-(W)$ — минимальное собственное значение матрицы W , а $\lambda^+(V)$ — максимальное собственное значение матрицы V . Обозначим $\alpha = \lambda^-(W)/\lambda^+(V)$. Тогда имеем неравенство

$$\dot{v}(t) \leq -\alpha v(t), \quad \alpha > 0.$$

Интегрируя это неравенство в пределах $(0, \infty)$, получим оценку для $v(t)$:

$$v(t) \leq v(0) \exp(-\alpha t) = x'(0) V x(0) \exp(-\alpha t).$$

Из этой оценки следует, что $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а это, очевидно, возможно тогда и только тогда, когда $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Стремление к нулю любого решения уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ в силу теоремы 2 § 15 эквивалентно устойчивости матрицы A .

Необходимость. Пусть A — устойчивая матрица. Тогда по теореме 4 § 12 существует единственное решение V уравнения $AV + VA' = -W$ при любой W . Покажем, что это решение положительно определено, если W — положительно определенная. По теореме 5 § 12 матрица V представима в виде

$$V = \int_0^{\infty} e^{A't} W e^{A't} dt,$$

поэтому при любом постоянном x_0 имеет место неравенство

$$x_0' V x_0 = \int_0^{\infty} x_0' e^{A't} W e^{A't} x_0 dt = \int_0^{\infty} x'(t) W x(t) dt > 0,$$

которое следует из положительной определенности матрицы W . $\odot$

Приведем ряд полезных следствий, вытекающих из теоремы Ляпунова.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы матрица A имела заданную степень устойчивости α , т. е. $\operatorname{Re} \lambda_i(A) \leq -\alpha$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, необходимо и достаточно, чтобы для любой заданной положительно определенной симметрической матрицы W существовало бы положительно определенное решение уравнения

$$-2\alpha V + A'V + VA = -W.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < -\alpha$ эквивалентно условию $\operatorname{Re} \lambda_i[A - \alpha E] < 0$. Это сразу следует из характеристического уравнения матрицы A . Поскольку для устойчивой матрицы $[A - \alpha E]$ должна выполняться теорема Ляпунова, подстановка в уравнение

$A'V + VA = -W$ вместо A матрицы $[A - \alpha E]$ доказывает следствие. $\odot$

С л е д с т в и е 2. В условии теоремы Ляпунова требование положительной определенности матрицы W можно заменить более слабым требованием неотрицательной определенности W при условии, что вдоль решений системы квадратичная форма $x'(t) W x(t)$ не равна тождественно нулю при любых ненулевых начальных условиях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно сохраняется неизменным для необходимости условий следствия. Докажем достаточность. Пусть имеется положительно определенное решение V уравнения $A'V + VA = -W$. Тогда в силу предположения имеет место неравенство $x'(t) W x(t) < 0$ при всех $x(t) \neq 0$ и всех $t \geq 0$. Но

$$\dot{v}(t) = -w(t) = -x'(t) W x(t).$$

Интегрируя, получим равенство

$$x'(t) V x(t) = x'(0) W x(0) + \int_0^t x'(t) W x(t) dt.$$

Предположим, что $x(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что неравенство $x'(t) W x(t) < -\varepsilon$ выполнено при всех t . В этом случае

$$x'(t) V x(t) < x'(0) W x(0) - \varepsilon t$$

и при $t \rightarrow \infty$ выражение справа становится отрицательным. Это противоречит предположению о положительной определенности V . $\odot$

Теорема Ляпунова сводит проверку устойчивости матрицы A к решению линейного матричного уравнения. Поскольку матрица V — симметрическая, то уравнение Ляпунова эквивалентно системе $n(n+1)/2$ линейных алгебраических уравнений. При большой размерности матрицы A решение такой системы оказывается иногда менее трудоемким, чем вычисление характеристического многочлена матрицы A . Функции $v(t) = x'(t) V x(t)$, где V — положительно определенная симметрическая матрица, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова, называются *квадратичными функциями Ляпунова*.

Подытожим теперь результаты, полученные при исследовании асимптотической устойчивости стационарной системы.

Теорема 2. Матрица A является устойчивой тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных утверждений:

1. Все решения уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ исчезают при $t \rightarrow \infty$.

2. Уравнение $A'V + VA - W$ имеет положительно определенное решение V для любой положительно определенной матрицы W .

3. Уравнение $A'V + VA - W$ имеет положительно определенное решение V для всякой неотрицательно определенной матрицы W , такой, что квадратичная форма $x'(t)Wx(t)$ не обращается в нуль тождественно вдоль любого нетривиального решения $x(t)$.

4. Строго положительны все определители Гурвица.

5. Строго положительны все диагональные элементы матрицы Рауса.

Геометрический смысл метода. Напомним, что всякая положительно определенная матрица V может быть использована для определения скалярного произведения в евклидовом пространстве по формуле $\langle x_1, x_2 \rangle = x_1' V x_2$. Следовательно, геометрический смысл метода Ляпунова исследования устойчивости стационарной системы заключается в том, что мы изучаем изменение расстояния от движущейся точки до начала координат. Если расстояние с течением времени строго монотонно уменьшается, то система асимптотически устойчива. При таком движении функция $x'(t) V x(t) = v(t, x)$ при каждом значении времени может быть интерпретирована как некоторая замкнутая выпуклая поверхность (n -мерный эллипсоид), причем, если $t_1 < t_2$, то выполнено неравенство $x'(t_1) V x(t_1) > x'(t_2) V x(t_2)$. Это неравенство соответствует тому, что поверхность, соответствующая большему значению времени, заключена внутри поверхности, которой соответствует меньшее значение времени.

Функции Ляпунова нестационарной системы. В прямом методе Ляпунова близость $x(t)$ к началу координат определяется с помощью функции Ляпунова $v(t) = x'(t) V(x)(t)$. Если величина $v(t)$ мала, то будет мала и величина $\|x(t)\|$ и точка $x(t)$ будет близка к началу координат. В нестационарном случае функция Ляпунова, вообще говоря, зависит явно от времени. В этом случае знакоопределенная функция $v(x, t)$ в обычном понимании может

сделаться малой по модулю не за счет близости $x(t)$ к началу координат, а за счет изменения времени t . Так, например, функция $v(x, t) = e^{-t}x^2(t)$ в обычном смысле — положительно определенная: $V(t) = e^{-t} > 0$ при всех t и обращается в нуль только при $x(t) = 0$. Однако судить о близости точки $x(t)$ к началу координат по этой функции нельзя, так как при достаточно больших значениях t за счет уменьшения множителя e^{-t} она будет меньше любого наперед заданного положительного числа ε при любом конечном значении $x(t)$. Поэтому в нестационарном случае необходимо специально определить класс квадратичных нестационарных функций, которые решали бы вопрос об устойчивости системы.

О п р е д е л е н и е 1. Вещественная непрерывная функция $v(x(t), t) = x'(t) V(t) x(t)$ называется *положительно определенной*, если существует положительная постоянная α такая, что при всех t выполнено неравенство

$$v(x(t), t) \geq \alpha \|x(t)\|^2 > 0.$$

Функция $v(x(t), t)$ называется *отрицательно определенной*, если найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$v(x(t), t) \leq -\alpha \|x(t)\|^2 < 0$$

при всех t . $\odot$

Теперь мы определим квадратичную функцию Ляпунова в нестационарном случае.

О п р е д е л е н и е 2. Положительно определенная функция $v(x, t) = x'(t) V(t) x(t)$ называется *квадратичной функцией Ляпунова* для системы $\dot{x}(t) = A(t) x(t)$, если выполнены следующие условия:

1. Существует $\alpha > 0$ такое, что

$$v(x, t) \leq \alpha \|x\|^2.$$

В этом случае говорят, что функция $v(x, t)$ имеет бесконечный высший предел.

2. Производная по времени $\dot{v}(x, t)$ в силу уравнений движения является отрицательно определенной функцией, т. е. существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\dot{v}(x, t) \leq -\gamma \|x\|^2 < 0. \odot$$

Существование квадратичной функции Ляпунова эквивалентно для линейной системы экспоненциальной устойчивости. Об этом свидетельствует

Теорема 3. Если для системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ существует квадратичная функция Ляпунова $v(x, t)$, то эта система равномерно асимптотически устойчива.

Доказательство. Поскольку $v(x, t)$ — квадратичная функция Ляпунова, то она ограничена сверху $v(x, t) \leq \alpha \|x\|^2$. Отсюда имеем

$$\dot{v}(x, t) \leq -\beta \|x\|^2 \leq -(\beta/\alpha) v(x, t).$$

Интегрируя это неравенство, получим, что $v(x, t)$ ограничена сверху значением $\exp [-(\beta/\alpha)(t - t_0)] v(x_0, t_0)$. Поскольку $v(x, t) \geq \varepsilon \|x\|^2$, то это означает, что

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon^{-1} \exp [-(\beta/\alpha)(t - t_0)] v(x_0, t_0),$$

и, следовательно, система экспоненциально устойчива. В то же время, согласно теореме 7 § 15, экспоненциальная устойчивость эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости. $\odot$

Из этой теоремы и равенства, получаемого путем дифференцирования квадратичной формы $v(x, t)$ по времени:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x, t) &= \dot{x}'(t) V(t) x(t) + x'(t) V(t) \dot{x}(t) + x'(t) \dot{V}(t) x(t) = \\ &= x'(t) [A'(t) V(t) + V(t) A(t) + \dot{V}(t)] x(t), \end{aligned}$$

непосредственно вытекает

Следствие. Для того чтобы система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ была асимптотически устойчива, достаточно, чтобы существовало решение уравнения

$$\dot{V}(t) + A'(t) V(t) + V(t) A(t) = W(t) \quad (1)$$

в виде положительно определенной матрицы $V(t)$ при любой отрицательно определенной матрице $W(t)$. $\odot$

Напомним, что (1) было получено в § 12 при рассмотрении задачи об оценке квадратичного функционала вдоль решений системы. Для стационарных систем согласно теореме Ляпунова существование функции Ляпунова является не только достаточным, но и необходимым условием. Для нестационарных систем имеет место аналогичное утверждение. Если система экспоненциально устойчива, то найдется соответствующая квадратичная функция Ляпунова. Об этом свидетельствует

Теорема 4. Пусть $A(t)$ — ограниченная матрица и уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ экспоненциально устойчиво.

Пусть, далее, $W(t)$ — ограниченная симметрическая положительно определенная матрица. Тогда интеграл

$$V(t) = \int_t^{\infty} \Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t) d\sigma$$

сходится при всех вещественных t и производная $\mathbf{x}'(t) V(t) \mathbf{x}(t)$ вдоль решений $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$ равна $-\mathbf{x}'(t) W(t) \mathbf{x}(t)$. Более того, если $W(t) \geq \varepsilon E$ для всех t , то существуют положительные постоянные η_1, η_2 такие, что

$$\eta_1 E \geq V(t) \geq \eta_2 E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $W(t)$ ограничена, то найдется $\alpha > 0$ такое, что $W \leq \alpha E$. По условию экспоненциальной устойчивости системы $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$ найдется пара положительных постоянных γ, λ таких, что

$$\|\Phi(\sigma, t)\| \leq \gamma e^{-\lambda(\sigma - t)}, \quad \sigma \geq t.$$

Используя эти две оценки, мы видим, что $V(t)$ ограничена сверху следующим неравенством:

$$V(t) \leq \int_t^{\infty} \alpha \gamma^2 e^{-2\lambda(\sigma - t)} E d\sigma = (\alpha/2\lambda) \gamma^2 E.$$

Вычисляя производную квадратичной формы $\mathbf{x}'(t) V(t) \mathbf{x}(t)$ вдоль траектории движения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}'(t) V(t) \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}'(t) [A'(t) V(t) + V(t) A(t) + \dot{V}(t)] \mathbf{x}(t) = \\ &= \mathbf{x}'(t) \left\{ \int_t^{\infty} [A'(\sigma) \Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t) A(\sigma)] d\sigma \right\} \mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{x}'(t) \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^{\infty} \Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t) d\sigma \right\} \mathbf{x}(t) = \\ &= \mathbf{x}'(t) \left\{ \int_t^{\infty} \frac{d}{dt} [\Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t)] d\sigma \right\} \mathbf{x}(t) = \\ &= -\mathbf{x}'(t) W(t) \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

При переходе от второго выражения к третьему мы использовали дифференциальное уравнение для матрицы

$\Phi(\sigma, t)$. При выводе последнего выражения мы использовали факт $\Phi(t, t) = E$. Чтобы доказать, что $x'(t) V(t) x(t)$ есть квадратичная функция Ляпунова, осталось лишь убедиться в том, что она ограничена снизу. Пусть $\|A(t)\| \leq a$ для всех t и пусть $W(t) \geq \varepsilon E > 0$. Тогда для $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

$$\|\dot{x}(t)\| \leq a \|x(t)\|.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\|\Phi(\sigma, t)x\| \geq e^{-a(\sigma-t)} \|x\|.$$

Используя это неравенство для оценки $x'(t) V(t) x(t)$, получим

$$\begin{aligned} x'(t) V(t) x(t) &= \int_t^\infty \{x'(\sigma) \Phi'(\sigma, t) W(\sigma) \Phi(\sigma, t) x(t)\} d\sigma \geq \\ &\geq \|x\|^2 e^{2a(t-t_0)} \int_t^\infty e^{-2a(\sigma-t)} d\sigma \geq \|x\|^2 \varepsilon / 2a. \odot \end{aligned}$$

В силу этой теоремы условие следствия теоремы 3 является необходимым и достаточным.

В заключение приведем сводку условий, гарантирующих равномерную асимптотическую устойчивость нестационарной системы.

Теорема 5. Для линейной однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ с непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$ эквивалентны следующие утверждения:

1. Нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво.

2. Существуют положительные постоянные α, β такие, что $\|\Phi(t, t_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}$.

3. Существует квадратичная функция Ляпунова $x'(t) V(t) x(t)$, производная которой вдоль уравнений движения является отрицательно определенной функцией $x'(t) W(t) x(t)$.

4. Матричное уравнение Ляпунова

$$\dot{V}(t) + A'(t) V(t) + V(t) A(t) = W(t)$$

имеет положительно определенное решение $V(t)$ при любой отрицательно определенной матрице $W(t)$. $\odot$

Задачи. 1. Докажите, что положительно определенное решение V уравнения

$$A'V + VA + 2\alpha W = 0$$

(где W — симметрическая положительно определенная матрица и $\alpha > 0$), удовлетворяющее условию $V < W$, существует тогда и только тогда, когда вещественные части собственных чисел матрицы A меньше величины $-\alpha$.

2. Докажите, что если уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ равномерно асимптотически устойчиво и интеграл $\int_0^{\infty} \|f(\sigma)\| d\sigma$ существует, то все решения уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ ограничены.

3. Докажите, что для устойчивости многочлена

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

необходимо и достаточно выполнение условий: $a_1, a_2, a_3 > 0$, $a_2a_1 - a_3^2 > 0$.

4. Вычислите функцию Ляпунова для системы $\dot{x}(t) = -e^{Ft}Ae^{-Ft}x(t)$, предполагая, что e^{Ft} — периодическая матрица, а матрица $A + F$ устойчива. Воспользуйтесь тем фактом, что если система $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ экспоненциально устойчива и $x'(t)Q(t)x(t)$ — соответствующая функция Ляпунова, то $z'P'(t) \times \times Q(t)P(t)z$ будет функцией Ляпунова экспоненциально устойчивой системы $z(t) = [P(t)A(t)P'(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)]z(t)$, где $z(t) = = P(t)x(t)$ — преобразование Ляпунова.

5. Докажите, что если $A(t)$ имеет период T и система $\dot{x}(t) = = A(t)x(t)$ экспоненциально устойчива, то существует положительно определенная матрица $V(t)$, которая имеет период T , а $x'V(t)x$ является функцией Ляпунова для $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

6. Покажите, что многочлен $(-1)^n |B - \lambda E|$, где

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_n & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix},$$

совпадает с многочленом $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$b_1 = \Delta_1, b_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, b_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2}, \dots, b_r = \frac{\Delta_r - \Delta_r\Delta_r}{\Delta_{r-2}\Delta_{r-1}}, \dots, \\ r = 4, 5, \dots, n$$

(Δ_i — определители Гурвица полинома $\varphi(\lambda)$).

7. Рассмотрите положительно определенную матрицу

$$V = \text{diag} \left[\prod_{i=1}^n b_i, \prod_{i=1}^{n-1} b_i, \dots, b_2b_1, b_1 \right],$$

где b_i определены в условии задачи 6, и покажите, что

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}'(t) V \mathbf{x}(t)] = -2V B \mathbf{x}'(t) \mathbf{x}(t) = -2b_n x_n^2.$$

Воспользовавшись этим фактом и следствием 2 теоремы Ляпунова, докажите критерий Рауса — Гурвица.

8. Могут ли матрицы

$$\begin{bmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & \sin^2 t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t & \cos t \\ -\cos t & t \end{bmatrix}$$

соответствовать квадратичным функциям Ляпунова?

9. Являются ли положительно определенными функции

$$1) v(\mathbf{x}, t) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1+t},$$

$$2) v(\mathbf{x}, t) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 \sin t?$$

§ 17. Функции Ляпунова и оценка качества переходного процесса

Оценка длительности переходного процесса. Пусть матрица A устойчива, а V — положительно определенное решение уравнения $AV + VA' = -E$, где E — единичная матрица. Запишем неравенство теоремы 9 § 8 в виде

$$\frac{\mathbf{x}'(t) V \mathbf{x}(t)}{\lambda^-(V)} \leq \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{\mathbf{x}'(t) V \mathbf{x}(t)}{\lambda^+(V)}. \quad (1)$$

В силу уравнения $AV + VA' = -E$ имеем

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}'(t) V \mathbf{x}(t)) = -\|\mathbf{x}(t)\|^2,$$

и наше неравенство принимает вид

$$-\frac{v(t)}{\lambda^-(V)} \leq \dot{v}(t) \leq -\frac{v(t)}{\lambda^+(V)},$$

или, домножая на $\frac{dt}{v(t)}$, имеем

$$-\frac{dt}{\lambda^-(V)} \leq \frac{dv}{v} \leq -\frac{dt}{\lambda^+(V)}.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$v(0) \exp(-t/\lambda^-(V)) \leq v(t) \leq v(0) \exp(-t/\lambda^+(V)).$$

Воспользовавшись теперь неравенством (1), получим оценку нормы вектора $x(t)$ вдоль траектории движения:

$$\frac{v(0)}{\lambda^+(V)} \exp\left[-\frac{t}{\lambda^-(V)}\right] \leq \|x(t)\|^2 \leq \frac{v(0)}{\lambda^-(V)} \exp\left[-\frac{t}{\lambda^+(V)}\right]. \quad (2)$$

Пользуясь этим неравенством, легко оценить время перехода системы из любого заданного начального состояния x_0 внутрь ε — окрестности начала координат. Действительно, пусть $x(0) = x_0$, а $\|x(t)\|^2 \leq \varepsilon^2$. Получим оценку для времени переходного процесса t . Из (2) имеем

$$\varepsilon^2 \leq \frac{v(0)}{\lambda^-(V)} \exp\left[-\frac{t}{\lambda^+(V)}\right],$$

откуда сразу следует

$$t < -\lambda^+(V) \ln \left\{ \frac{\lambda^-(V) \varepsilon^2}{x_0^T x_0} \right\}.$$

Таким образом, если известна функция Ляпунова $x'(t) V x(t)$, то по заданному начальному состоянию системы x_0 можно, не решая уравнений системы, получить оценку для длительности переходного процесса, приводящего систему в начало координат.

Оценка квадратичного отклонения. Рассмотрим уравнения движения устойчивого стационарного объекта $\dot{x}(t) = Ax(t)$. В § 12 показано, что величина

$$J = \int_0^{\infty} x'(t) W x(t) dt,$$

где W — положительно определенная матрица, может быть оценена по формуле

$$J = x'(0) V x(0).$$

где V — положительно определенная матрица, которая является решением уравнения Ляпунова

$$A'V + VA = -W.$$

Таким образом, знание функции Ляпунова позволяет оценить среднеквадратичное отклонение траектории движения от нуля, не решая уравнений объекта.

Обсуждение. Резюмируя наш краткий обзор прямого метода Ляпунова, отметим следующее.

1. Вторым методом Ляпунова является эффективным инструментом исследования устойчивости движения и характера переходного процесса в линейных объектах. Для проведения такого исследования не требуется решения уравнений объекта.

2. Если можно найти функцию Ляпунова, то метод становится конкретным инструментом, позволяющим исследовать динамику управляемого объекта. В линейном стационарном случае это всегда можно сделать, решив линейное матричное уравнение Ляпунова.

3. Уже в формулировке второго метода содержится идея о придании системе заданных свойств. Правда, эта идея выражена пока косвенно. Именно, система устойчива, если можно найти (построить, угадать) функцию Ляпунова, которая решает вопрос об устойчивости. Поскольку эта функция имеет ясный геометрический смысл и, кроме того, поскольку с помощью этой функции можно количественно оценить основные черты переходного процесса, то задачу конструирования системы с заданными свойствами можно формулировать так: выбрать структуру системы, или какие-то элементы этой структуры, имеющиеся в нашем распоряжении (например, цепи обратной связи), таким образом, чтобы замкнутая система обладала заданной функцией Ляпунова.

Численное решение уравнения Ляпунова. Рассмотрим задачу численного решения уравнения $A'V + VA = -W$ для случая, когда матрица A устойчива, а матрица W неотрицательно определена. Согласно теореме 5 § 12 решение уравнения Ляпунова в этом случае можно представить в виде

$$V = \int_0^{\infty} e^{A't} W e^{A't} dt.$$

Воспользуемся для численного определения этого интеграла формулой прямоугольников, тогда

$$\int_0^{\infty} e^{A't} W e^{A't} dt = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} e^{A'kh} W e^{Akh}.$$

Для вычисления матричных экспонент используем алгоритм § 13. Тогда

$$e^{Ah} = I - Ah + [12E - 6hA + h^2A^2]^{-1}[12E + 6hA + h^2A^2].$$

Отсюда следует, что

$$e^{A^j k} = \Lambda^k,$$

и поэтому формулу для V можно переписать так:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} h [W + \Lambda' W \Lambda + \Lambda'^2 W \Lambda^2 + \dots + \Lambda'^k W \Lambda^k + \dots].$$

Обозначим частичные суммы этого ряда через V_k . Тогда нетрудно видеть, что V_k можно вычислить, пользуясь следующей рекуррентной формулой:

$$V_{k+1} = \Lambda'^{2k} V_k \Lambda^{2k} + V_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем $V_1 = hW + \Lambda' hW\Lambda$.

Решение уравнения Ляпунова будет пределом частичных сумм V_k , т. е.

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k.$$

Алгоритм решения уравнения Ляпунова состоит из следующих шагов:

1. Выбираем $h > 0$.
2. Вычисляем матрицу

$$\Lambda = [12E - 6hA + h^2 A^2]^{-1} [12E + 6hA + h^2 A^2].$$

3. Вычисляем матрицу $V_1 = h [W + \Lambda' W \Lambda]$.
4. При $k = 1, 2, \dots$, вычислим

$$V_{k+1} = \Lambda'^{2k} V_k \Lambda^{2k} + V_k.$$

Величина h должна выбираться так, чтобы обеспечить достаточную точность вычислений. В работе [58] рекомендуется значение h выбирать по формуле

$$h = \frac{1}{200 |\lambda^+(A)|},$$

где $\lambda^+(A)$ — доминирующее собственное значение матрицы A , т. е. $\lambda_i(A) \leq \lambda^+(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Заметим, что алгоритм является устойчивым при любых значениях h , поскольку, как было показано в § 13 (теорема 2), все собственные значения матрицы Λ по модулю меньше единицы.

Требуемый объем памяти машины при этом алгоритме составляет $4n^2$ слов. Время вычислений при больших n

можно оценить по формуле [58] $(2,5k + 4)n^2\mu$, где μ — время операции умножения, k — число итераций, используемых при вычислениях.

Задачи. 1. Оцените время, за которое система $\dot{x}(t) = Ax(t)$ с устойчивой матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

попадет на единичную сферу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ из начальной точки $x'(0) = [3, 5, 7]$.

2. Оцените величину

$$J = \int_0^{\infty} x'(t) x(t) dt$$

для движения системы задачи 1 из точки $x'_0 = [10, 2, 1]$ в начало координат.

3. Составьте программу для ЦВМ решения матричного уравнения Ляпунова, пользуясь приведенным в тексте алгоритмом, для случая $n = 4$.

4. Для системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

выберите вектор $k' = [k_1, k_2]$ так, чтобы на решениях системы $\dot{x}(t) = [A - bk']x(t)$ достигала минимума функция

$$J = \int_0^{\infty} x'(t) x(t) dt.$$

Чему равна оптимальная функция Ляпунова?

§ 18. Постановка задач управления

Обсуждение вопросов устойчивости вплотную подводит нас к постановке задач аналитического проектирования систем управления.

Следующие основные ситуации характерны для задач синтеза управляемых линейных конечномерных объектов.

1. Задано желаемое соотношение между входными и выходными величинами $u(t)$ и $y(t)$. Требуется выбрать структуру системы (матрицы A , B , C) таким образом, чтобы получить это соотношение.

2. Задана структура системы (матрицы A , B , C). Требуется найти входные управляющие воздействия таким образом, чтобы выход системы имел бы заданные свойства.

Первая из этих задач решается в рамках теории реализации линейных систем, которая здесь не рассматривается. Вторая задача, которая будет предметом нашего исследования, может быть названа задачей управления системой заданной структуры. Качественно эту задачу можно сформулировать одним из следующих способов.

Задача программного управления. Заданы уравнения системы и некоторое начальное состояние. Требуется выбрать управляющую функцию $u(t)$ такую, чтобы система перешла в заданное конечное состояние. Если при этом требуется минимизировать некоторую функцию от управления u (или) от траектории, то задача называется *задачей оптимального программного управления*.

Примером задачи программного управления является задача вывода ракеты в заданную точку пространства с заданной скоростью, задача выбора расходов топлива по зонам нагревательной печи таким образом, чтобы температура зон менялась бы в соответствии с заданной программой. Задачей оптимального программного управления является задача выбора параметров технологического режима, обладающего каким либо оптимальным свойством, или задача выбора такой траектории движения объекта, которая удовлетворяла бы свойству оптимальности. Типичными критериями при постановке таких задач являются: время переходного процесса (задачи быстрогодействия), расход энергетических ресурсов, надежность выполнения некоторых условий ограничивающего характера и т. п. Решение этих задач связано с решением вариационной задачи. Основным инструментом здесь является принцип максимума Понтрягина. Как правило, задачу программного управления приходится решать для нелинейных уравнений движения объекта. Решения простейших задач программного управления для линейных объектов будут приведены в главах IV и VII.

Задача регулирования. Постановка этой задачи связана с введенной Ляпуновым концепцией возмущенного движения объекта. Невозмущенное движение объекта —

это движение под действием заданного управления, оптимального или неоптимального. Если это движение из-за неточности в задании начальных условий, из-за помех, поступающих из окружающей среды, дрейфа параметров объекта во время его движения или по другим причинам отклоняется от расчетного номинального движения, то, вводя вектор $x(t)$ отклонения действительного движения от номинального, можно получить уравнения возмущенного движения относительно этого вектора $x(t)$. Если считать отклонения малыми, то уравнения возмущенного движения будут линейными относительно вектора $x(t)$. В терминах уравнений в отклонениях или уравнений возмущенного движения задача стабилизации номинальной траектории движения сводится к выбору таких управляющих воздействий в функции переменных состояния уравнений возмущенного движения, чтобы обеспечить уменьшение этих отклонений во времени. Для линейной модели это означает, устойчивость нулевого решения однородного уравнения.

Эта задача является типичной и для тех случаев, когда объект подвержен действию нежелательных возмущений, которые влияют на его выходную величину. Например, эту задачу решает регулятор положения радиолокационной антенны, которая отклоняется от заданного положения из-за порывов ветра.

Помимо задачи о конструировании регулятора, для линейных объектов часто представляет интерес задача о выборе таких управляющих воздействий в функции состояния, когда выходная переменная следит за соответствующим наблюдаемым входным воздействием, принадлежащим некоторому заданному классу функций. Это так называемая задача слежения. Эту задачу, например, необходимо решать в случае, когда радиолокационная антенна должна следить за летящим самолетом или когда требуется стабилизировать движение летательного аппарата вдоль заданной траектории.

Задача регулирования является частным случаем задачи о следящей системе, когда отслеживаемый сигнал равен нулю. Однако часто справедливо и обратное утверждение. Задачу о следящей системе можно свести к задаче регулирования, если всякую ошибку слежения (разность между заданным отслеживаемым сигналом и выходом си-

стем) рассматривать в качестве регулируемой переменной. Поэтому основное внимание в дальнейшем будет уделено задаче регулирования, точная математическая постановка которой такова:

Дан линейный конечномерный объект

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t). \end{cases} \quad (\text{ЛС})$$

Пусть в некоторый момент времени t_0 объект оказался в состоянии $x(t_0) \neq 0$. Требуется выбрать такое управляющее воздействие $u(t)$, зависящее от начального состояния $x(t_0)$, которое приводило бы объект в начало координат пространства состояний. Этот переход должен осуществляться либо за конечное время $t_1 - t_0 > 0$, либо вектор состояния $x(t)$ должен асимптотически приближаться к нулевому значению при $t \rightarrow \infty$, т. е. должно выполняться одно из двух условий:

- 1) либо $x(t_1; t_0, x(t_0), u(t)) = 0$.
- 2) либо $x(t; t_0, x(t_0), u(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Нас будет интересовать управляющая функция, решающая эту задачу, не только в виде некоторой функции времени (управление по разомкнутому контуру), но главным образом в виде функции от состояния, либо выхода объекта, т. е. в виде $u(t) = u(t, x(t))$, или в виде $u(t) = u(t, y(t))$ (управление по замкнутому контуру или управление в виде обратной связи). Основное внимание будет уделено стационарным регуляторам, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость объекта, оказавшегося обратной связью.

З а м е ч а н и е! Еще раз подчеркнем, что если в задаче программного управления обычно ищут управляющее воздействие по открытому контуру, то в задаче регулирования необходимо строить управление в функции состояния системы (в виде обратной связи). Различие между этими задачами аналогично различию между задачей выбора некоторого решения дифференциального уравнения, проходящего через некоторую заданную точку пространства состояний, и задачей исследования устойчивости этого решения. Вторая задача требует изучения

свойств всей совокупности решений уравнений объекта. Поэтому методы аналитического конструирования регуляторов по существу совпадают с методами исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Так, например, функция Ляпунова позволяет оценить все существенные характеристики переходного процесса, и поэтому задачу проектирования регулятора, обеспечивающего стабилизацию заданного программного движения объекта, можно формулировать как задачу выбора такой обратной связи, чтобы матрица замкнутой системы A соответствовала заданной функции Ляпунова V .

Г Л А В А IV

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

В этой главе исследуются свойства линейных обратных связей в управляемых системах для случая, когда все переменные состояния могут быть измерены и поданы на вход системы с соответствующим коэффициентом усиления. Подробно будет исследована лишь задача о регуляторе состояния линейной системы. Основным результатом решения этой задачи заключается в том, что для управляемой системы можно выбрать закон управления, обеспечивающий произвольно хорошие динамические свойства замкнутой системы (§ 23). В § 22 мы подробно обсудим вопросы преобразования координат в пространстве состояний и введем понятие канонических представлений линейных стационарных систем в пространстве состояний. При этом будут введены две канонические формы представления систем, имеющих много входов и много выходов.

§ 19. Управляемость и достижимость

Понятие управляемости. Первый вопрос, который возникает при исследовании задачи регулирования, состоит в следующем. Если система находится в некотором начальном состоянии x_0 , то существует ли непрерывное управляющее воздействие $u(t)$, которое переводит систему в состояние $x_1 \neq x_0$ за время $t_1 - t_0$?

Прежде чем обсудить этот вопрос с формальной точки зрения и ввести соответствующие понятия, рассмотрим примеры, показывающие, что этот вопрос не является тривиальным.

Рассмотрим электрическую цепь на рис. 19.1. Переменной состоянием этой системы будет напряжение на емкости C , которое обозначим через $x(t)$. Если $x(t_0) = 0$, то,

очевидно, $x(t) = 0$ при всех $t \geq t_0$ вне зависимости от входного воздействия $u(t)$.

Входное управляющее воздействие не оказывает влияния на переменную состояния, поэтому про такую систему говорят, что она неуправляема в момент времени t_0 .

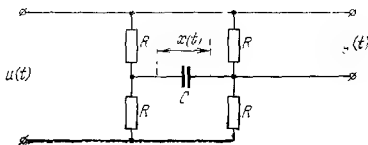


Рис. 19.1.

В электрической цепи на рис. 19.2 две переменные состояния x_1 , x_2 равны напряжениям на емкостях. Входное воздействие — напряжение на входе $u(t)$ — влияет на обе переменные состояния. С помощью входного воздействия можно любую из двух переменных состояний

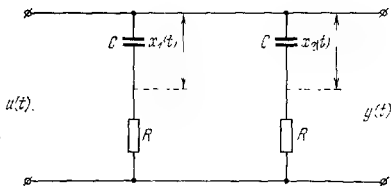


Рис. 19.2.

свести к любому значению, но нельзя привести к любому значению состояние системы — вектор (x_1, x_2) . Действительно, если $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$, то независимо от $u(t)$ имеем $x_1(t) = x_2(t)$ при любых t , и, например, в состояние $x_1(t_1) = 1$, $x_2(t_1) = 0$ попасть нельзя. Поэтому эта система тоже неуправляема.

Введем теперь определение свойства управляемости.

О п р е д е л е н и е 1. Событие (t_0, x_0) линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

называется *управляемым относительно точки x_1* , если существуют момент времени $t_1 \geq t_0$ и управление $u(t)$, определенное на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, которое переводит событие (t_0, x_0) в событие (t_1, x_1) . $\odot$

Обычно нас будет интересовать управляемость относительно начала координат: $x_1 = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Линейная система называется *управляемой в момент времени t_0* , если каждое событие (t_0, x) , где t_0 фиксировано, а $x \in X$, является управляемым. Если же момент времени не упоминается, то эти свойства должны выполняться при всех t_0 . $\odot$

Определение управляемости построено таким образом, чтобы оно описывало необходимые и достаточные условия существования регулятора в линейной системе. Напомним, что цель регулятора состоит в том, чтобы перевести систему из произвольного начального состояния x_0 в некоторое требуемое состояние x_1 , обычно совпадающее с началом координат.

Для линейной системы критерий управляемости формулируется с помощью свойств некоторого линейного оператора (матрицы).

Управляемость системы с нулевой матрицей A . Рассмотрим простейший случай, когда матрица $A(t)$ в уравнении системы равна нулевой матрице. Тогда динамика системы задана уравнением

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$x(t)$ — n -мерный вектор состояния, $B(t)$ — матрица размеров $(n \times m)$. Предположим, что $x(t_0)$ и $B(t)$ известны, и поставим задачу выбора такого управления $u(t)$, которое обеспечивало бы в момент времени $t = t_1 > t_0$ выполнение условия $x(t_1) = x_1$.

Интегрирование уравнения движения системы дает

$$x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t)dt.$$

Заметим, что выражение

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt \quad (1)$$

можно рассматривать как линейное преобразование, которое ставит в соответствие каждому элементу $u(t)$ пространства $C^m[t_0, t_1]$ элемент пространства R^n . Формально

$$L(u): C^m[t_0, t_1] \rightarrow R^n, \quad u(t) \rightarrow x(t_1).$$

Поскольку нужно выбрать управление $u(t)$, которое удовлетворяло бы условию

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt,$$

то, очевидно, если $x_1 - x_0$ лежит в области значений линейного преобразования $L(u)$, тогда желаемый перевод системы в x_1 возможен. В противном случае — нет. Чтобы сформулировать эту задачу в общем виде, введем соответствующие определения.

Если $B(t)$ — матрица $n \times m$, составленная из непрерывных функций времени, определенных на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то преобразование $L: C^m[t_0, t_1] \rightarrow R^n$, определяемое формулой (1), является линейным преобразованием.

Говорят, что x_1 принадлежит области значений этого преобразования, если существует элемент $u_1(t)$ в пространстве $C^m[t_0, t_1]$ такой, что

$$L(u_1) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u_1(t) dt = x_1.$$

Таким образом, чтобы проверить, является ли состояние управляемым, необходимо установить, лежит ли это состояние в области значений оператора $L(u)$, преобразующего бесконечномерное пространство в конечномерное. Этот оператор не может быть записан с помощью конечной матрицы, и проверка названного условия затруднительна. К счастью, можно построить линейное преобразование, отображающее n -мерное пространство в n -мерное, область значений которого в точности совпада-

ет с областью значений оператора $L(u)$. Это построение формулирует следующая

Л е м м а. n -вектор x_1 лежит в области значений оператора

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt$$

тогда и только тогда, когда он принадлежит области значений линейного преобразования

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) B'(t) dt. \quad (2)$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Если $x_1 \in \text{range } W(t_0, t_1)$, то существует вектор z_1 такой, что $W(t_0, t_1) z_1 = x_1$. Определим $u(t)$ по формуле $u(t) = B'(t) z_1$, тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} B(t) B'(t) dt z_1.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если x_1 не лежит в области значений оператора $W(t_0, t_1)$, то существует вектор x_2 такой, что $W(t_0, t_1)x_2 = 0$ и одновременно $x_2 x_1 \neq 0$.

Можно указать, например, следующий способ построения вектора x_2 . Так как $W(t_0, t_1)$ — симметрический оператор, он расщепляет пространство R^n в прямую сумму

$$R^n = X \cap \text{range } W(t_0, t_1) \oplus \ker W(t_0, t_1).$$

Пусть размерность ядра $W(t_0, t_1)$ отлична от нуля и пусть r — размерность области значений $W(t_0, t_1)$ (r равно рангу матрицы W). Выберем в R^n базис $e_1, e_2, \dots, e_r, \dots, e_n$ такой, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_r$ лежат в области значений $W(t_0, t_1)$. Пусть x_1 не лежит в области значений $W(t_0, t_1)$ и его представление в выбранном базисе имеет вид

$$x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_r e_r + \dots + \alpha_n e_n,$$

причем $\alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ не все равны нулю. В качестве вектора x_2 можно взять, например, вектор

$$x_2 = \alpha_{r+1} e_{r+1} + \alpha_{r+2} e_{r+2} + \dots + \alpha_n e_n.$$

Ясно, что $x_2 \neq 0$, по предположению, и кроме того,

$$x_2' x_1 - \alpha_{r+1}^2 + \alpha_{r+2}^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0.$$

Продолжим доказательство. Пусть вектор $x_1 \notin \text{range } W(t_0, t_1)$ и одновременно является управляемым. Из управляемости x_1 следует, что существует $u_1(t)$ такое, что

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t) u_1(t) dt = x_1,$$

тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} x_2' B(t) u_1(t) dt - x_2' x_1 \neq 0,$$

но

$$x_2' W(t_0, t_1) x_2 = \int_{t_0}^{t_1} [x_2' B(t)] [B'(t) x_2] dt = 0.$$

Так как $B(t)$ непрерывна, то из

$$x_2' W(t_0, t_1) x_2 = \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t) x_2\|^2 dt = 0$$

следует, что $B'(t) x_2 \equiv 0$ при всех $t_0 \leq t \leq t_1$, а это противоречит условию

$$\int_{t_0}^{t_1} x_2' B(t) u_1(t) dt \neq 0. \quad \odot$$

С л е д с т в и е. Управление $u(t)$, которое переводит состояние системы $\dot{x}(t) = B(t)u(t)$ из x_0 при $t = t_0$ в x_1 при $t = t_1$, существует тогда и только тогда, когда вектор $x_1 - x_0$ лежит в области значений линейного преобразования (2).

При этом одно из управлений, осуществляющее этот перевод, имеет вид $u(t) = B'(t)z$, где z является любым решением уравнения

$$W(t_0, t_1)z = x_1 - x_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что управление $u(t) = B'(t)z$ переводит состояние x_0 в x_1 , проверено при доказательстве необходимости условий леммы. Об-

ратно. Если управление $u(t)$, переводящее x_0 в x_1 , существует, то вектор $x_1 - x_0$ принадлежит области значений линейного преобразования (1) в силу формулы Коши. Но по данной лемме вектор $(x_1 - x_0)$ тогда и только тогда принадлежит области значений этого преобразования, когда он лежит в области значений преобразования (2). $\odot$

Критерий управляемости. Перейдем теперь к линейной системе общего вида, когда $A(t) \neq 0$. Здесь результат, аналогичный только что приведенному следствию леммы, формулируется в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 1 (критерий управляемости). *Для линейной системы*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

тогда и только тогда существует управление $u(t)$, которое переводит систему из состояния x_0 при $t = t_0$ в состояние x_1 при $t = t_1 \geq t_0$, когда вектор $x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1$ принадлежит области значений линейного преобразования

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B'(t) \Phi'(t_0, t) dt.$$

Более того, если x_ — какое-либо решение уравнения*

$$W(t_0, t_1)x_* = x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1,$$

то $u(t)$, заданное формулой $u(t) = -B'(t)\Phi'(t_0, t_1)x_$, является одним из управлений, обеспечивающих указанный переход.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейное преобразование уравнений системы с помощью замены переменной $z(t) = \Phi(t_0, t)x(t)$. Тогда $x(t) = \Phi(t, t_0)z(t)$ и $\Phi(t, t_0)\dot{z}(t) + \dot{\Phi}(t, t_0)z(t) = A(t)\Phi(t, t_0)z(t) + B(t)u(t)$, но $\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$ по свойству 6 переходной матрицы. Значит,

$$\Phi(t, t_0)\dot{z}(t) = B(t)u(t).$$

Умножая это равенство слева на $\Phi(t_0, t)$, получим

$$\dot{z}(t) = \Phi(t_0, t)B(t)u(t).$$

Из предыдущей леммы известно, что множество значений, которые может принимать вектор $z(t_1) - z(t_0)$, принадлежит области значений матрицы

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B'(t) \Phi'(t_0, t) dt.$$

Чтобы завершить желаемый переход, потребуем, чтобы $z(t_1) - z(t_0) - \Phi(t_0, t_1) x_1 - \Phi(t_0, t_0) x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1 - x_0$.

Отсюда следует, что желаемое преобразование возможно тогда и только тогда, когда $[x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1]$ лежит в области значений $W(t_0, t_1)$. Из следствия предыдущей леммы вытекает, что одно из управлений, обеспечивающее заданное преобразование системы, имеет вид

$$u(t) = -B'(t) \Phi'(t_0, t) x_*,$$

где x_* удовлетворяет равенству

$$W(t_0, t_1) x_* = x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1.$$

С л е д с т в и е. Если при некотором t_0 и любых t_1 матрица $W(t_0, t_1)$ имеет максимальный ранг, то линейная система управляема. $\odot$

Матрица $W(t_0, t_1)$ играет важную роль в теории управления линейных систем. Основные свойства этой матрицы содержит следующая

Т е о р е м а 2. Матрица W , определенная в формулировке теоремы 1, обладает следующими свойствами:

1. $W(t_0, t_1)$ — симметрическая матрица.
2. $W(t_0, t_1)$ неотрицательно определена для $t_1 \geq t_0$.
3. $W(t_0, t_1)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} W(t, t_1) = A(t) W(t, t_1) + W(t, t_1) A'(t) - B(t) B'(t),$$

$$W(t_1, t_1) = 0.$$

4. $W(t_0, t_1)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$W(t_0, t_1) = W(t_0, t) + \Phi(t_0, t) W(t, t_1) \Phi'(t_0, t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство 1 сразу следует из определения. Для доказательства свойства 2 рассмотрим

произвольный постоянный вектор z . Тогда

$$\begin{aligned} z'W(t_0, t_1)z &= \int_{t_0}^{t_1} z'\Phi(t_0, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t_0, \sigma)z d\sigma = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B'(\sigma)\Phi'(t_0, \sigma)z\|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно $z'W(t_0, t_1)z \geq 0$ для всех действительных z . Для доказательства свойства 3 достаточно вычислить производную функции $W(t, t_1)$ по t . Используя правило Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{t_1} \Phi(t, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t, \sigma) d\sigma &= \\ &= -B(t)B'(t) + \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} \{\Phi(t, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t, \sigma)\} d\sigma = \\ &= -B(t)B'(t) + A(t) \int_0^{t_1} \Phi(t, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t, \sigma) d\sigma + \\ &+ \int_0^{t_1} \Phi(t, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t, \sigma) d\sigma A'(t). \end{aligned}$$

Используя это соотношение, легко проверить справедливость дифференциального уравнения свойства 3. Граничное условие очевидно выполняется по определению матрицы $W(t_0, t_1)$.

Чтобы доказать свойство 4, представим интеграл в определении W как сумму двух интегралов

$$\begin{aligned} W(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t_0, \sigma) d\sigma + \\ &+ \int_t^{t_1} \Phi(t_0, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t_0, \sigma) d\sigma = \\ &= W(t_0, t) + \Phi(t_0, t) \int_t^{t_1} \Phi(t, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t, \sigma) d\sigma \Phi'(t_0, t). \end{aligned}$$

Из этого равенства сразу следует функциональное уравнение свойства 4, если воспользоваться определением $W(t, t_1)$. $\odot$

С л е д с т в и е. *С расширением области интегрирования ранг матрицы $W(t_0, t_1)$ не убывает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $W(t_0, t_1)$ неотрицательно определена, то

$$x'W(t_0, t_1)x \geq 0, \quad \text{для любого } x \in R^n.$$

Пусть при некотором t_1 имеет место строгое неравенство $x'W(t_0, t_1)x > 0$. Отсюда сразу следует, что $|W(t_0, t_1)| > 0$, и значит, ранг матрицы $W(t_0, t_1) = n$. Для любого $t > t_1$ имеем

$$W(t_0, t) = W(t_0, t_1) + \Phi(t_0, t_1)W(t_1, t)\Phi(t_0, t_1).$$

Первая матрица справа положительно определена, вторая неотрицательно определена, значит, их сумма положительно определена и ранг $W(t_0, t) = n$. $\odot$

Управляемая система была определена как система, которая может быть с помощью соответствующего управляющего воздействия переведена из произвольного начального состояния в начало координат или в некоторую точку пространства состояний. В некоторых случаях полный вектор состояния $x(t)$ не доступен для измерения. В качестве выходных величин системы имеются лишь отдельные компоненты вектора состояний, или линейные комбинации его компонент. Тогда интересно исследовать управляемость системы по отношению к выходной величине $y(t)$. Нетрудно видеть, что решение вопроса об управляемости системы по отношению к ее выходной величине не представляет дополнительных трудностей, так как выход системы связан с ее состоянием с помощью алгебраического (а не динамического) соотношения $y(t) = C(t)x(t)$. Следующая теорема содержит необходимое обобщение критерия управляемости.

Т е о р е м а 3. *Управление $u(t)$, которое переводит выход системы (ЛС) в точку y_1 при $t = t_1 > t_0$, существует тогда и только тогда, когда $y_1 = C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0$ лежит в области значений линейного преобразования*

$$C(t_1)\Phi(t_1, t_0)W(t_0, t_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 известно, что каждое управляемое при $t = t_1$ состояние x_1 удовлетворяет

равенству

$$\Phi(t_0, t_1)x_1 = x_0 - W(t_0, t_1)x_*,$$

и, следовательно, может быть записано в виде

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0)[x_0 - W(t_0, t_1)x_*].$$

Это означает, что любое управляемое значение $y(t_1) = y_1$ имеет вид

$$y_1 = C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0 - C(t_1)\Phi(t_1, t_0)W(t_0, t_1)x_*.$$

Отсюда сразу следует, что для того, чтобы можно было достичь некоторое y_1 , нужно, чтобы вектор $y_1 - C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0$ лежал в области значений оператора $C(t_1)\Phi(t_1, t_0)W(t_0, t_1)$. $\odot$

Матрицу $W(t_0, t_1)$ называют иногда грамианом управляемости. Дело в том, что структура этой матрицы напоминает структуру матрицы Грама для системы векторов n -мерного пространства. Следующая теорема, доказательство которой оставляем читателю, поясняет использование этого термина.

Теорема 4. Пусть $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — элементы пространства $C^m[t_0, t_1]$. Пусть, далее, $F(t)$ — матрица размером $n \times m$, строками которой являются $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Определим матрицу

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)F'(t)dt.$$

Векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы на $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда $(n \times n)$ -матрица $W(t_0, t_1)$ — неособенная. $\odot$

$W(t_0, t_1)$ называют грамианом системы функций $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Следствие. Если система $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ управляема при некотором t_1 , то строки $(n \times m)$ -матрицы $\Phi(t_0, t)B(t)$ линейно независимы.

Замечание. Грамиан управляемости $W(t_0, t_1)$ совпадает с матрицей $\tilde{V}(t_0, t_1)$, определенной в § 12 с помощью уравнения (3), в том случае, если в этом уравнении положить $W(t) = B'(t)B(t)$. Вспомните, какой физический смысл имеет матрица $\tilde{V}(t_0, t_1)$. $\odot$

Критерий достижимости. Перейдем теперь к описанию понятия достижимости линейной системы.

О п р е д е л е н и е 3. Событие (t_0, x_0) линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

называется *достижимым из состояния* x_1 , если найдется такое $t_{-1} \leq t_0$ и такое входное воздействие $u(t)$, $t_{-1} \leq t \leq t_0$, что оно переводит систему из состояния x_1 при $t = t_{-1}$ в состояние x_0 при $t = t_0$. $\odot$

Как и раньше, нас в основном будут интересовать события, достижимые из начала координат $x_1 = 0$.

Заметим, что понятие достижимости является точным аналогом понятия управляемости, если изменить направление времени. Иначе, достижимость — это управляемость в «обратном времени».

По аналогии с управляемой системой определим достижимую систему.

О п р е д е л е н и е 4. Система называется *достижимой*, в момент времени t_{-1} , если любое событие (t_0, x) , где t_0 фиксировано, а $x \in X$, является достижимым. $\odot$

Совпадает с точностью до направления времени с критерием управляемости и критерий достижимости. Сформулируем этот критерий для событий, достижимых из начала координат.

Т е о р е м а 5 (критерий достижимости). *Событие (t_0, x) линейной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ достижимо из начала координат тогда и только тогда, когда при некотором $t_{-1} < t_0$ состояние x принадлежит области значений линейного преобразования*

$$\hat{W}(t_{-1}, t_0) = \int_{t_{-1}}^{t_0} \Phi(t_0, \sigma) B(\sigma) B'(\sigma) \Phi'(t_0, \sigma) d\sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно аналогично доказательству теоремы 1 и может быть представлено читателю в качестве упражнения. $\odot$

Заметим, что оператор $\hat{W}(t_{-1}, t_0)$ отличается от оператора $W(t_0, t_1)$ лишь диапазоном интегрирования одной и той же подынтегральной функции. Для того чтобы проверить управляемость, нужно проинтегрировать некоторую функцию на отрезке $[t_0, t_1]$, где $t_1 \geq t_0$, а для провер-

ки достижимости достаточно ту же функцию проинтегрировать на отрезке $[t_1, t_0]$, где $t_1 \leq t_0$. Отсюда ясно, что в нестационарной системе из управляемости не следует достижимости, а из достижимости не следует управляемость.

Рассмотрим простой пример: скалярное уравнение $\dot{x}(t) = b(t)u(t)$. Если $b(t)$ имеет вид, представленный на рис. 19.3, а, то система в момент t_0 управляема, но недостижима. Если же функция $b(t)$ имеет вид, как на рис. 19.3, б, то такая система в момент t_0 полностью достижима, но неуправляема.

Для стационарной системы можно показать, что из управляемости следует достижимость, и обратно.

Замечание. Полученное в теореме 1 управляющее воздействие, которое переводит управляемую систему из состояния x_0 при $t = t_0$ в состояние x_1 при $t = t_1$, $t_1 > t_0$, не является единственным. Оно определено с точностью до некоторой произвольной, вообще говоря, функции $v(t)$, которая удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \sigma) B(\sigma) v(\sigma) d\sigma = 0.$$

Общая формула для управления, обеспечивающего перевод (t_0, x_0) в (t_1, x_1) , имеет вид

$$u(t) = -B'(t)\Phi'(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1] + v(t). \quad (3)$$

При $v(t) = 0$ функция $u(t)$, переводящая (t_0, x_0) в (t_1, x_1) , обладает замечательным свойством. Она имеет минимальную

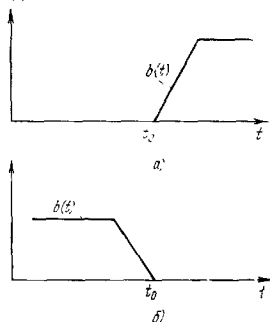


Рис. 19.3.

норму среди всех функций $u(t)$ вида (3). Это положение будет строго доказано в § 34.

Линейные периодические системы. Если система является управляемой, то в нестационарном случае, вообще говоря, нельзя указать конечное время, за которое каждое состояние системы можно было бы преобразовать в начало координат. Для специального класса управляемых нестационарных систем, описываемых линейными периодическими уравнениями, любое состояние можно перевести в начало координат за время, не большее периода системы.

Пусть элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные периодические функции времени с периодом T . Согласно теореме Флоке — Ляпунова переходную матрицу для матрицы $A(t)$ можно представить в виде

$$\Phi(t, t_0) = P(t) e^{(t-t_0)R} P^{-1}(t_0),$$

где R — постоянная матрица размеров $n \times n$, а $P(t)$ — невырожденная непрерывная периодическая матрица, определенная в § 11. Оператор $W(t_0, t)$ для периодической системы можно представить в виде

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t P(t_0) e^{(t_0-\sigma)R} P^{-1}(\sigma) B(\sigma) B'(\sigma) (P^{-1}(\sigma))' e^{(\sigma-t_0)R'} P'(t_0) d\sigma.$$

Он не обязательно является периодическим, хотя его подынтегральная функция является периодической функцией времени.

Теорема 6. Если периодическая система управляема, то ее из любого начального состояния можно перевести в начало координат за время не большее периода системы.

Доказательство. Пусть T — период системы. Предположим, что ранг оператора $W(t_0, t_0 + T)$ меньше n . Тогда существует ненулевой вектор x такой, что $W(t_0, t_0 + T)x = 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} 0 = x' W(t_0, t_0 + T) x &= \int_{t_0}^{t_0+T} x' \Phi(t_0, \sigma) B(\sigma) B'(\sigma) \Phi'(t_0, \sigma) x d\sigma = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \|x' \Phi(t_0, \sigma) B(\sigma)\|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, то $x' \Phi(t_0, \sigma) B(\sigma) \equiv 0$ при любом $t_0 \leq \sigma \leq t_0 + T$. Но это значит, в силу периодичности функции $\Phi(t, \sigma) B(\sigma)$, что $\Phi(t, \sigma) B(\sigma) \equiv 0$ при любом $\sigma > t_0$. Последнее противоречит управляемости системы. $\odot$

Задачи. 1. Получите условия управляемости, аналогичные теореме 1, для матричного дифференциального уравнения

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + C(t)V(t)D(t).$$

2. Пусть $f(t)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция. Предположите, что $f'(t) \geq \varepsilon > 0$ для всех t . Покажите, что если $\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \neq 0$, то для всех $t_1 > 0$ уравнение

$$\int_0^{t_1} e^{-At} b f(b'e^{-A't} p) dt = x$$

имеет единственное решение p для любого заданного x .

3. Покажите, что предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi(0, \sigma) B(\sigma) B'(\sigma) \Phi'(0, \sigma) d\sigma$$

существует, если система $\dot{x}(t) = -A'(t)x(t)$ равномерно асимптотически устойчива, а $\|B(t)\|$ ограничена для $0 \leq t \leq \infty$.

4. Докажите, что дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) + u(t)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

управляемо (в том смысле, что если заданы $x(0)$, $\dot{x}(0)$ и $x^*(t_1)$, $\dot{x}^*(t_1)$, то существуют $u(t)$ и $t_1 > 0$ такие, что $x(t_1) = x^*(t_1)$ и $\dot{x}(t_1) = \dot{x}^*(t_1)$), если выполнены условия: $x^2(0) + \dot{x}^2(0) \neq 0$ и $(x_1^*(t_1))^2 + (\dot{x}_1^*(t_1))^2 \neq 0$.

5. Рассмотрите векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = g(t)[Ax(t) + Bv(t)],$$

где $g(t)$ непрерывна и ограничена:

$$0 < \alpha \leq g(t) \leq \beta < \infty.$$

Здесь A, B — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ соответственно.

Покажите, что если ранг матрицы $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ равен n , то при любом заданном $T > 0$ и любых x_0 и x_1 существует управление $u(t)$, которое переводит систему из состояния x_0 при $t = 0$ в состояние x_1 при $t = T$.

(Указание. Рассмотрите изменение масштаба времени.)

6. Если A и B — постоянные матрицы, то

$$W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B' e^{-A't} dt.$$

Из теоремы 2 известно, что

$$\frac{d}{dt} W(t, t_1) = AW(t, t_1) + W(t, t_1)A' - BB', \quad W(t_1, t_1) = 0.$$

Если матрица Q_0 является решением уравнения

$$AQ_0 + Q_0A' - BB' = 0,$$

то покажите, что матрица $M(t, t_1) = [W(t, t_1) - Q_0]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} M(t, t_1) = AM(t, t_1) + M(t, t_1)A'$$

с начальным условием $M(t_1, t_1) = -Q_0$ и что матрица $W(t, t_1)$ представима в виде

$$W(t, t_1) = Q_0 - e^{-A(t-t_1)}Q_0e^{-A'(t-t_1)}.$$

З а м е ч а н и е. Уравнение $AQ + QA' - BB' = 0$ может и не иметь решения Q_0 . Здесь сделано, вообще говоря, произвольное допущение о существовании такого решения.

7. Пусть $W_A(t_0, t_1)$ является граммом управляемости для системы

$$\dot{z}(t) = [P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)]z(t) + P(t)B(t)u(t).$$

Покажите, что $P(t_0)W_B(t_0, t_1)P'(t_0) = W_A(t_0, t_1)$.

§ 20. Стационарные объекты

Критерий управляемости. В стационарном случае критерий управляемости принимает простую и компактную форму. Пусть заданы матрицы системы $\{A, B\}$. Составим матрицу U размеров $n \times mn$, первые m столбцов которой совпадают со столбцами матрицы B , вторые m столбцов совпадают со столбцами матрицы AB и т. д., последние m столбцов матрицы U образованы матрицей $A^{n-1}B$. Матрицу U записывают так:

$$U = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B].$$

Управляемость стационарной системы связана со свойствами матрицы U . Докажем простую лемму.

Л е м м а. Если ранг $[B, AB, \dots, A^{p-1}B]$ равен рангу $[B, AB, \dots, A^pB]$, то дальнейшее прибавление столбцов вида $A^{p+i}B$, $i = 1, 2, \dots$, не увеличивает ранга матрицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется указанное в условии леммы равенство, то все столбцы матрицы

$A^p B$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы $[B, AB, \dots, A^{p-1}B]$. Но тогда и все столбцы матрицы $A^{p+1}B = AA^pB$ тоже линейно выражаются через столбцы матрицы $[B, AB, \dots, A^{p-1}B]$, и следовательно, при любом $i \geq 1$ добавление слева к этой матрице элементов вида $A^{p+i}B$ не увеличивает ее ранга. $\odot$

Из доказанной леммы, в частности, следует, что прибавление каждого последующего элемента вида $A^p B$ либо увеличивает ранг матрицы на некоторое постоянное число, либо не меняет ранга. В последнем случае и прибавление всех последующих столбцов вида $A^{p+i}B$ не будет увеличивать ранга матрицы.

Сформулируем теперь основной результат теории линейных стационарных систем.

Т е о р е м а 1 (критерий управляемости стационарной системы). *Линейная стационарная n -мерная система*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{ранг } U = \text{ранг } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть система не является управляемой, а $\text{ранг } U = n$. Тогда найдется вектор $x_1 \neq 0$, лежащий в ядре оператора $W(t_0, t_1)$ и такой, что при любом t выполнено равенство $x_1' \Phi(t_0, t)B \equiv 0$. (Подробно это рассуждение проведено при доказательстве необходимости условий леммы § 19.) Поскольку система — стационарная, не нарушая общности, положим $t_0 = 0$. Тогда $x_1' \Phi(0, t)B = 0$ при любом $t \geq 0$. Дифференцируя это тождество по t ($n-1$) раз и полагая $t = 0$, получим

$$x_1' B = 0, \quad x_1' AB = 0, \quad x_1' A^2 B = 0, \dots, x_1' A^{n-1} B = 0,$$

или $x_1' [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0$ и одновременно $x_1' \neq 0$. Но ненулевой вектор может быть ортогонален всем столбцам матрицы U в том и только в том случае, когда $\text{ранг } U < n$ (см. § 8). Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть все состояния управляемы, а $\text{ранг } U < n$. Если $\text{ранг } U < n$, то существует вектор $z \neq 0$, ортогональный всем столбцам матрицы U ,

т. е.

$$\mathbf{z}'B = 0, \quad \mathbf{z}'AB = 0, \dots, \mathbf{z}'A^{n-1}B = 0.$$

По теореме Кэли — Гамильтона (§ 5) имеем

$$\mathbf{z}'(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0)B = 0,$$

и значит, $\mathbf{z}'A^nB = 0$. Но тогда, в силу доказанной леммы, равенство $\mathbf{z}'A^pB = 0$ выполняется при любом $p \geq 0$. Так как все состояния управляемы, то управляемо и состояние $\mathbf{z}$, т. е.

$$0 = \Phi(t, 0)\mathbf{z} + \int_0^t \Phi(t, \sigma)B\mathbf{u}_z(\sigma)d\sigma.$$

Для стационарной системы известен явный вид переходной матрицы: $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, поэтому

$$0 = e^{At}\mathbf{z} + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}B\mathbf{u}_z(\sigma)d\sigma = e^{At}\left[\mathbf{z} + \int_0^t e^{-A\sigma}B\mathbf{u}_z(\sigma)d\sigma\right],$$

или

$$\mathbf{z} = -\int_0^t e^{-A\sigma}B\mathbf{u}_z(\sigma)d\sigma.$$

Умножая это равенство слева на $\mathbf{z}'$, получим

$$\mathbf{z}'\mathbf{z} = \|\mathbf{z}\|^2 = -\int_0^t \mathbf{z}'\left(E - A\sigma + A^2\frac{\sigma^2}{2!} - \dots\right)B\mathbf{u}_z(\sigma)d\sigma.$$

Но $\mathbf{z}'A^pB = 0$ при любом $p \geq 0$, следовательно, правая часть этого равенства равна нулю. Это противоречит предположению, что $\mathbf{z} \neq 0$. $\odot$

Согласно доказанной теореме свойство управляемости системы полностью определяется алгебраическими свойствами пары матриц $\{A, B\}$. Именно, если матрица U , составленная указанным выше образом, имеет полный ранг, то система управляема. В противном случае можно построить неуправляемое состояние.

Поскольку речь идет о стационарной системе и поскольку в качестве входных воздействий рассматриваются непрерывные функции времени, формулируемое ниже следствие не должно показаться удивительным.

С л е д с т в и е 1. *Линейная управляемая стационарная система может быть переведена из состояния x при $t = 0$ в начало координат к моменту $t = \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что матрица $W(0, \varepsilon)$ достигает полного ранга при любом $\varepsilon > 0$. В стационарном случае имеем

$$W(0, \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} e^{-\sigma A} B B' e^{-\sigma A'} d\sigma.$$

Если ранг $W(0, \varepsilon) < n$, то найдется состояние $x \neq 0$ такое, что $x \in \ker W(0, \varepsilon)$. Аналогично тому, как было показано при доказательстве достаточности условий теоремы, можно получить равенства

$$x'B = 0; \quad x'AB = 0, \dots, x'A^{n-1}B = 0, \dots,$$

которые противоречат критерию управляемости стационарной системы. Следовательно, если система управляема, то матрица $W(0, \varepsilon)$ имеет полный ранг при любом $\varepsilon > 0$. $\odot$

Так как управляемость стационарной системы определяется только алгебраическими свойствами пары матриц $\{A, B\}$, то часто говорят просто об управляемости пары матриц $\{A, B\}$.

Используя результат леммы, перепишем критерий управляемости стационарной системы в следующем виде.

С л е д с т в и е 2. *Линейная стационарная система управляема тогда и только тогда, когда ранг $[B, AB, \dots, A^{n-r}B] = n$, где r — ранг матрицы B .* $\odot$

С л е д с т в и е 3. *Обозначим через φ_A характеристический многочлен матрицы A , а через ψ_A — минимальный многочлен этой матрицы. Если для матрицы A существует матрица-столбец b такая, что пара $\{A, b\}$ управляема, то $\varphi_A = \psi_A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку полином ψ_A нормирован и является делителем полинома φ_A , нам необходимо лишь установить, что степени этих полиномов совпадают. Но так как $\varphi_A(A)b = 0$ по теореме Кэли — Гамильтона, то предположение о том, что степень полинома ψ_A меньше n , противоречит критерию управляемости, ибо в этом случае найдется x такой, что $x'[A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0]b = 0$ или, более подробно,

$x'A^n b = 0$, $x'A^{n-1}b = 0$, ..., $x'b = 0$. Значит, среди векторов $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ есть линейно зависимые, а это противоречит критерию управляемости. $\odot$

С л е д с т в и е 4. В линейной стационарной управляемой системе ранг матрицы $W(t_0, t)$ при любом $t > t_0$ равен рангу матрицы $U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ и равен размерности пространства состояний системы n . Здесь r — ранг B . $\odot$

Задача финитного управления. Согласно следствию 1 управляемая система может быть переведена в начало координат за произвольно малое время с помощью непрерывного управления. Этот вывод не должен показаться удивительным, поскольку мы считаем, что матрицы $\{A, B\}$ заданы точно, и кроме того, мы не налагаем на управление никаких дополнительных ограничений, кроме непрерывности. Задачу о выборе управления, которое переводит систему в заданное состояние за фиксированное время, называют *задачей финитного управления* [42].

Если стационарная система управляема, то оператор $W(t_0, t_1)$ имеет полный ранг при любых $t_1 > t_0$ и, следовательно, существует обратный оператор $W^{-1}(t_0, t_1)$. В этом случае уравнение

$$W(t_0, t_1)x_* = x_0 - x_1 \Phi(t_0, t_1)$$

имеет решение

$$x_* = W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - x_1 \Phi(t_0, t_1)],$$

и формула для финитного управления, переводящего событие (t_0, x_0) в событие (t_1, x_1) , имеет вид

$$u(t) = -B'\Phi'(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1]. \quad (1)$$

Напомним, что это управление определено с точностью до аддитивно добавляемой произвольной функции $v(t)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \sigma) B v(\sigma) d\sigma = 0.$$

Перейдем к примерам.

П р и м е р 1. Пусть даны уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_2; \end{aligned}$$

матрицы этой системы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Построим матрицу управляемости:

$$U = [b, Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг $U = 1$ и, следовательно, система неуправляема.

Пример 2. Система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$U = [b, Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

является управляемой, так как ранг $U = 2$.

Вычислим для этой системы управление, которое переводит событие $(x, 0)$ в событие $(0, \varepsilon)$. Согласно теореме 1 § 19 одно из таких управлений дает формула

$$u_x(t) = -b' \Phi'(0, t) W^{-1}(0, \varepsilon) x.$$

Вычислим переходную матрицу и грамиан управляемости

$$\Phi'(0, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad W(0, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^3}{3} & \frac{\varepsilon^2}{2} \\ \frac{\varepsilon^2}{2} & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$W^{-1}(0, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{12}{\varepsilon^4} & -\frac{6}{\varepsilon^3} \\ -\frac{6}{\varepsilon^2} & \frac{4}{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Искомое управление имеет вид:

$$u_x(t) = -[0, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{\varepsilon^3} & -\frac{6}{\varepsilon^2} \\ -\frac{6}{\varepsilon^2} & \frac{4}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ = -\frac{6}{\varepsilon^2} \left(x_2 - \frac{2x_1}{\varepsilon} \right) t + \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{3x_1}{\varepsilon} - 2x_2 \right).$$

Это одно из многих управлений, решающих задачу финитного управления. Вычислим еще одно управление.

Для этого согласно замечанию 2 необходимо построить функцию $v(t)$, которая удовлетворяет условию

$$\int_0^\varepsilon \Phi(\varepsilon, \sigma) B v(\sigma) d\sigma = 0.$$

Управление $u_x(t) + v(t)$ по-прежнему будет переводить $(x, 0)$ в $(0, \varepsilon)$. Уравнение для $v(\sigma)$ имеет, очевидно, бесконечное множество решений в классе непрерывных функций. Вычислим одно из них. Подставляя в это уравнение выражение для переходной матрицы $\Phi(\varepsilon, \sigma)$, получим

$$\int_0^\varepsilon \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon - \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(\sigma) d\sigma = 0.$$

Это векторное уравнение соответствует двум скалярным

$$\int_0^\varepsilon (\varepsilon - \sigma) v(\sigma) d\sigma = 0, \quad \int_0^\varepsilon v(\sigma) d\sigma = 0.$$

Будем искать $v(\sigma)$ в виде квадратного многочлена $v(\sigma) = \sigma^2 - \alpha\sigma + \beta$. Тогда получим два линейных уравнения для определения коэффициентов α и β . Решая эту систему, найдем: $\alpha = -\varepsilon$, $\beta = \varepsilon^2/6$. Итак, управление

$$u(t) = \frac{6}{\varepsilon^2} \left(x_2 - \frac{2x_1}{\varepsilon} \right) t + \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{3x_1}{\varepsilon} - 2x_2 \right) + t^2 - \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{6}$$

преобразует событие $(x, 0)$ в событие $(0, \varepsilon)$.

Пример 3. Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Построим управление, переводящее систему из начального состояния x_0 в момент $t = 0$ в начало координат при $t = t_1$. По-прежнему воспользуемся формулой (1). Переходная матрица системы имеет вид:

$$\Phi(0, t) = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} \end{bmatrix} = \Phi'(0, t).$$

Вычислим граммы управляемости, обозначив $t_1 - t$,

$$\begin{aligned}
 W(0, t) &= \int_0^t \Phi(0, \sigma) B B' \Phi'(0, \sigma) d\sigma = \\
 &= \int_0^t \begin{bmatrix} (b_{11}^2 + b_{12}^2) e^{2a_{11}\sigma} & (b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22}) e^{(a_{11}+a_{22})\sigma} \\ (b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22}) e^{(a_{11}+a_{22})\sigma} & (b_{21}^2 + b_{22}^2) e^{2a_{22}\sigma} \end{bmatrix} d\sigma = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{b_{11}^2 + b_{12}^2}{2a_{11}} (e^{2a_{11}t} - 1) & \frac{b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22}}{a_{11} + a_{22}} (e^{2a_{22}t} - 1) \\ \frac{b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22}}{a_{11} + a_{22}} (e^{(a_{11}+a_{22})t} - 1) & \frac{b_{21}^2 + b_{22}^2}{2a_{22}} (e^{2a_{22}t} - 1) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Вычислим обратную матрицу

$$W^{-1}(0, t_1) = \frac{1}{w_{22}w_{11} - w_{21}w_{12}} \begin{bmatrix} w_{22} & -w_{12} \\ -w_{21} & w_{11} \end{bmatrix}.$$

Обозначим координаты вектора $x' = [x_1, x_2]$. Тогда иско-
мое управление примет вид

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \\
 &= \frac{-1}{w_{22}w_{11} - w_{21}w_{12}} \begin{bmatrix} x_1(w_{11}b_{11}e^{a_{11}t} + w_{21}b_{21}e^{a_{22}t}) + x_2(w_{12}b_{11}e^{a_{11}t} + w_{22}b_{21}e^{a_{22}t}) \\ x_1(w_{12}b_{12}e^{a_{11}t} + w_{21}b_{22}e^{a_{22}t}) + x_2(w_{12}b_{12}e^{a_{11}t} + w_{22}b_{22}e^{a_{22}t}) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Эквивалентность управляемости и достижимости.
В § 19 было установлено, что линейная система достижима тогда и только тогда, когда линейное преобразование

$$\hat{W}(t_{-1}, t_0) = \int_{t_{-1}}^{t_0} \Phi(t_0, \sigma) B B' \Phi'(t_0, \sigma) d\sigma$$

имеет полный ранг. Но из следствия 1 теоремы 1 вытекает, что матрица $W^{-1}(t_{-1}, t_0)$ имеет полный ранг для управляемой системы при любом $t_0 > t_1$. Значит, управляемая стационарная система является и достижимой. Справедливо, очевидно, и обратное утверждение. В стационарном случае справедлива, таким образом, следующая

Теорема 2. Для линейной n -мерной стационарной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

следующие утверждения являются эквивалентными:

1. система управляема,
2. система достижима,
3. оператор $W(t_0, t_1)$ имеет полный ранг при любом $t_1 > t_0$,
4. оператор $\hat{W}(t_{-1}, t_0)$ имеет полный ранг при любом $t_0 > t_{-1}$,
5. ранг матрицы $U = [B, AB, \dots, A^{n-r}B]$ равен n , здесь $r = \text{ранг } B$. $\odot$

Наиболее подходящим для практической проверки наличия у системы свойства управляемости является условие 5.

Задачи. 1. Является ли управляемой пара матриц

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

2. Для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + u \end{aligned}$$

вычислите одно из управлений, обеспечивающих перевод события $(0, x_0)$ в событие (t, x_1) . Примите $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. Сформулируйте критерий управляемости для матричного стационарного дифференциального уравнения

$$\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B + CV(t)D,$$

где $X(t)$, A , B — матрицы $n \times n$, а размерность матриц C , $V(t)$, D равна $n \times n$, $r \times m$, $m \times n$ соответственно.

4. Вычислите граничную управляемость $W(0, 1)$ для стационарной системы $\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$.

5. Пусть Q — положительно определенная матрица. Когда стационарная система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ -Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t)$$

управляема?

6. Если стационарная линейная система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

управляема, то покажите, что существует матрица C (зависящая от b_i) такая, что система

$$\dot{x}(t) = (A + BC)x(t) + b_i u(t)$$

также управляема. Здесь b_i — любой ненулевой столбец матрицы B .

З а м е ч а н и е. Решение этой задачи будет получено в § 23.

§ 21. Понятие обратной связи

Закон управления. Для линейной конечномерной системы состоянием в момент времени t_0 является вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$. Поскольку сформулированная задача регулирования заключается в том, чтобы обеспечить движение системы в начало координат при любых начальных состояниях, необходимо формировать управление, обеспечивающее такое движение, по данным о состоянии системы, или, как принято говорить в автоматике, необходимо формировать управление в виде обратной связи. Далее будет показано, что для линейной системы вопрос об ее управляемости и вопрос о существовании произвольно хорошего управления в виде обратной связи тесно связаны между собой. Начнем с определения закона управления.

О п р е д е л е н и е 1. Законом управления будем называть отображение $k: T \times X \rightarrow U$, ставящее в соответствие каждому моменту времени t и состоянию системы в этот момент времени $x(t)$ значение управляющего воздействия $u(t)$. $\odot$

Отображение k , или функция $k(t, x(t))$, определяет $u(t)$ неявным образом. Действительно, при подобном определении, чтобы найти $u(t)$, необходимо решить функциональное уравнение

$$u(t) = k(t, x(t, x_0, u(t))).$$

Сразу не ясно, будет ли функция $u(t)$, вычисленная таким образом, принадлежать классу непрерывных функций, выбранному нами в качестве исходного множества управляющих воздействий? Какие ограничения нужно наложить на функцию $k(\cdot, \cdot)$ для того, чтобы решение этого уравнения было бы непрерывной функцией? Один из способов выбора таких ограничений — потребовать линейности функции $k(t, x(t))$ по t и по $x(t)$. Примем функцию $k(t, x(t))$ в виде $k(t, x(t)) = K(t)x(t)$ (линейный закон управления), где $K(t)$ — матрица размеров $m \times n$, составленная из непрерывных функций. В этом случае мы конструируем линейный регулятор, для которого

$$u(t) = -K(t)x(t).$$

Уравнение замкнутой системы примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) - B(t)K(t)x(t) = \\ &= [A(t) - B(t)K(t)]x(t).\end{aligned}$$

Матрицы этой системы составлены из непрерывных функций, и следовательно, существует переходная матрица $\Phi(t, t_0)$, непрерывная по обоим аргументам. Отсюда следует, что $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$ является непрерывной функцией. Значит, непрерывной будет и функция $u(t) = -K(t)x(t)$.

В дальнейшем будут рассматриваться только линейные законы управления. В соответствии с поставленной задачей предстоит выбрать матрицу цепи обратной связи $K(t)$ так, чтобы матрица замкнутой системы обеспечивала бы заданную динамику приближения системы к нулевому состоянию.

Стационарный управляемый объект. Если система $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ управляема в момент t_0 , то ее можно перевести, как было показано в § 20, из любого начального состояния x в начало координат с помощью непрерывного управления. Можно ли реализовать именно это управление в виде линейной обратной связи по состоянию? Ответ на этот вопрос для случая управляемого стационарного объекта дает

Теорема 1. В линейном стационарном управляемом объекте $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ входное воздействие $u(t) = -B'W^{-1}(t, t_1)x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, преобразует событие (t_0, x) в $(t_1, 0)$.

Доказательство. Покажем, что управление, указанное в условии теоремы, совпадает с управлением

$$u_x(t) = -B'\Phi'(t_0, t)z, \quad \text{где} \quad W(t_0, t_1)z = x,$$

которое, согласно теореме 1 § 19, переводит событие (t_0, x) в $(t_1, 0)$. Вычислим траекторию движения системы под действием этого управления. Пользуясь формулой Коши, имеем

$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi(t, t_0)W(t_0, t_1)z - \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma)BB'\Phi'(t_0, \sigma)z d\sigma = \\ &= \Phi(t, t_0)[W(t_0, t_1) - W(t_0, t)]z.\end{aligned}$$

Мы воспользовались свойством переходной матрицы

$$\Phi(t, \sigma) = \Phi(t, t_0) \Phi(t_0, \sigma).$$

Используя теперь свойство 4 оператора $W(t_0, t_1)$ (см. теорему 2 § 19), согласно которому

$$W(t_0, t_1) = W(t_0, t) + \Phi(t_0, t)W(t, t_1)\Phi'(t_0, t),$$

получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t)W(t, t_1)\Phi'(t_0, t)z = \\ &= W(t, t_1) \Phi'(t_0, t)z. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для управления, указанную в условии теоремы, замечаем, что

$$u_-(t) = -B'W^{-1}(t, t_1)W(t, t_1)\Phi'(t_0, t)z = -B'\Phi'(t_0, t)z$$

в точности совпадает с управлением $u_x(t)$. $\odot$

Из доказанной теоремы следует, что матрица обратной связи $K(t) = B'W^{-1}(t, t_1)$ обеспечивает движение системы из (t_0, x) в $(t_1, 0)$.

З а м е ч а н и е. Закон управления $u(t) = -B'W^{-1}(t, t_1)x(t)$ редко используется на практике, так как $K(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_1$. Это связано с условием точного попадания в начало координат за конечное время переходного процесса. Кроме того, полученный закон управления не является стационарным. Основной вывод доказанной теоремы состоит в том, что для полностью управляемого стационарного объекта можно не только выбрать управление как функцию времени, обеспечивающее переход системы в начало координат за любое конечное время, но и реализовать это управление в виде (к сожалению, нестационарной) обратной связи.

Нестационарные объекты. В случае нестационарной системы матрица $W(t, t_1)$ (грамиан управляемости) может не иметь обратной при некоторых t даже в том случае, если система управляема. Однако и в этом случае управление в виде обратной связи, которое удовлетворяет условиям теоремы, существует и имеет прежний вид

$$u(t) = -B'(t)W^+(t, t_1)x(t),$$

где W^+ — псевдообратная матрица оператора $W(t, t_1)$, которая определена при всех t как решение матричного

уравнения $WXW = W$, такое, что отображение $t \rightarrow X(t, t_1)$ при каждом t_1 является кусочно-непрерывным. Подробности о построении и свойствах псевдообратной матрицы имеются, например, в книге [10]. Здесь же мы только проиллюстрируем на простом примере трудности, которые могут возникнуть при обращении матрицы $W(t, t_1)$ в нестационарной системе.

Пример 1. Пусть дана скалярная нестационарная система $\dot{x}(t) = b(t)u(t)$. Переходная матрица этой системы равна 1 ($\Phi(t, t_0) = 1$). Пусть функция $b(t)$ имеет вид, представленный на рис. 21.1. Система в момент t_0

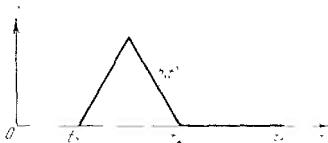


Рис. 21.1.

является полностью управляемой. Выберем в качестве конечного момента времени t_1 , тогда оператор $W(t, t_1)$ имеет вид

$$W(t, t_1) = \begin{cases} \int_t^{t_1} b^2(\tau) d\tau & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Для всех значений времени $t_* \leq t \leq t_1$ оператор $W(t, t_1) = 0$ и, следовательно, не имеет обратного, хотя система и является полностью управляемой. Поэтому формулой

$$u(t) = -B'(t)W^{-1}(t, t_1)x(t)$$

воспользоваться нельзя. Чтобы обойти эти трудности, используется понятие псевдообратной матрицы.

Пример 2. Полученное уравнение нестационарного линейного регулятора трудно использовать на практике, так как $W(t, t_1) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_1$. Правда, при этом $x(t) \rightarrow 0$, и управляющее воздействие $u(t) = -B'(t)W^{-1}(t, t_1)x(t)$ остается конечной величиной, но

реализовать его затруднительно, так как придется умножать бесконечно большие величины на бесконечно малые.

В принципе, однако, эта обратная связь может быть использована для построения многоканального или импульсного регулятора следующим образом.

Пусть состояние системы изменяется под действием помехи, спектр частот которой ограничен частотой ω_n . Выберем период T подключения регулятора к объекту так, чтобы он был одного порядка с величиной $\frac{1}{2\pi\omega_n}$, а время подключения регулятора выберем так, чтобы $\Delta t \ll T$

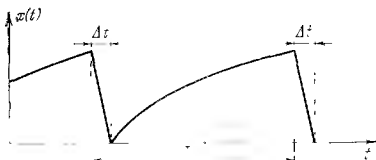


Рис. 21.2.

При этом условии можно не учитывать действие помехи в период регулирования. Схематически процесс регулирования представлен на рис. 21.2.

Рассмотрим конструирование подобного регулятора для объекта второго порядка $\ddot{x}(t) = u(t)$. Как было показано ранее, матрицы такого объекта имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 0].$$

Переходная матрица

$$\Phi(0, t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно показать, что $W(t, t_1)$ имеет вид

$$W(t, t_1) = \begin{bmatrix} \frac{(t_1 - t)^3}{3} & \frac{(t_1 - t)^2}{2} \\ \frac{(t_1 - t)^2}{2} & (t_1 - t) \end{bmatrix},$$

а значит,

$$W^{-1}(t, t_1) = \begin{bmatrix} \frac{12}{(t_1 - t)^3} & \frac{-6}{(t_1 - t)^2} \\ \frac{-6}{(t_1 - t)^2} & \frac{4}{(t_1 - t)} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица обратной связи

$$K(t) = B'W^{-1}(t, t_1) = \left[\frac{-6}{(t_1 - t)^2}, \frac{4}{(t_1 - t)} \right].$$

Структурная схема этого объекта, охваченного обратной связью, представлена на рис. 21.3.

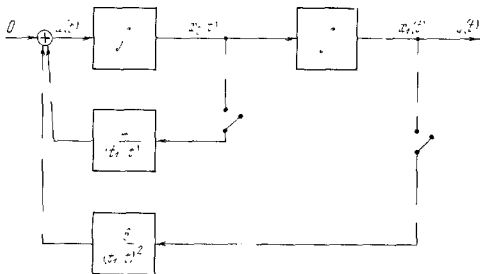


Рис. 21.3.

На практике основной интерес представляют стационарные обратные связи: $K = \text{const.}$ При решении задачи регулирования с помощью такого класса обратных связей нам придется отказаться от требования точного попадания системы в начало координат за конечное время регулирования. Единственной разумной заменой этого требования может быть требование асимптотической устойчивости системы относительно начала координат. Ниже будет показано, что управляемая стационарная линейная система может быть сделана асимптотически устойчивой с помощью стационарной обратной связи, причем характеристический многочлен замкнутой системы можно выбирать по своему усмотрению.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, мы обсудим вопрос о выборе базиса в пространстве состояний линейной стационарной системы.

Задача. Для системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

вычислите управление в виде обратной связи, которое обеспечивает перевод любого события $(0, x)$ в событие $(t, 0)$.

§ 22. Канонические представления

Полученные до сих пор результаты не были связаны с каким либо конкретным базисом пространства состояний. Все они были справедливы для любого базиса, в котором записаны матрицы A, B, C, Φ, W . В дальнейшем нам удобно будет выбирать вполне определенный базис в пространстве X с тем, чтобы матрицы системы имели хорошую (каноническую) форму.

Это будет полезно в двух отношениях. Во-первых, канонические представления матриц системы имеют минимальное число ненулевых элементов и потому удобны при вычислениях и при моделировании системы. Во-вторых, канонические представления существенно упрощают, как мы увидим в дальнейшем, доказательства основных теорем о свойствах обратной связи в линейной стационарной системе. С их помощью будут получены простые алгоритмы вычисления структуры и коэффициентов регуляторов, обеспечивающих желаемые динамические свойства замкнутой системы.

Замена базиса в пространстве состояний. Для линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned}$$

рассмотрим невырожденное линейное преобразование переменных $\hat{x} = P\mathbf{x}$, где P — несингулярная матрица размером $n \times n$. В новых переменных уравнения системы примут вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = PAP^{-1}\hat{\mathbf{x}} + P\mathbf{B}u, \\ y = CP^{-1}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{B}u, \\ y = \hat{C}\hat{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

Преобразования матрицы системы вычисляются по формулам

$$\hat{A} = PAP^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = CP^{-1}.$$

Матрицы $\hat{A}$ и A подобны, и значит, их характеристические многочлены совпадают.

Напомним, что столбцы матрицы P^{-1} содержат координаты новых базисных векторов относительно старого базиса. Если новые координатные векторы известны, то матрицу A в новом базисе $\{e_i\}$ можно вычислить по правилу (см. § 7): i -й столбец матрицы A в базисе $\{e_i\}$ состоит из координат вектора Ae_i в этом базисе.

Соотношение между входом системы $u(t)$ и выходной величиной $y(t)$ в исходной и преобразованной системах останется неизменным. Одним и тем же входным воздействием будут соответствовать одинаковые выходные величины. Это можно показать непосредственно, выписав выражение для выхода $y(t)$ в обеих системах. Для исходной системы имеем по формуле Коши

$$y(t) = Cx(t) = C \left[e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right].$$

Для преобразованной системы, аналогично, имеем

$$\hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) = \hat{C} \left[e^{\hat{A}(t-t_0)} \hat{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} u(\tau) d\tau \right],$$

но

$$e^{\hat{A}(t-t_0)} = P e^{A(t-t_0)} P^{-1}, \quad \hat{B} = PB, \quad \hat{C} = CP^{-1}, \quad \hat{x}_0 = Px_0.$$

Подставляя эти равенства в формулу для $\hat{y}(t)$, убедимся, что

$$y(t) = \hat{y}(t).$$

Линейные невырожденные преобразования координат в пространстве состояний линейной системы по существу соответствуют обычным методам преобразования структурных схем в теории регулирования. Именно, каждому разрешенному (не изменяющему передаточной функции) структурному преобразованию в теории регулирования соответствует некоторое невырожденное преобразование

координат в пространстве состояний системы. Верно и обратное утверждение. Рассмотрим простой пример.

Пусть дана система

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [1, 0].$$

Рассмотрим невырожденное преобразование координат, заданное матрицей

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы системы имеют вид

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = P\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'P^{-1} = [0, 1].$$

Структурная схема преобразованной системы представлена на рис. 22.1, а. Методами структурных преобразо-

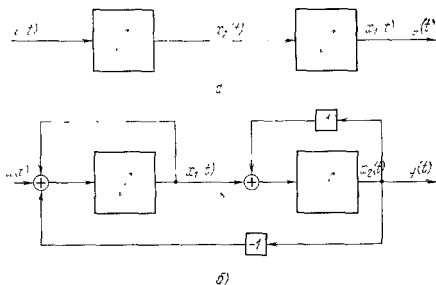


Рис. 22.1.

ваний она может быть сведена к первоначальному виду (рис. 22.1, б).

Вычисление матрицы преобразования. Рассмотрим теперь вопрос о вычислении матрицы преобразования P по заданным матрицам одной и той же системы, записанным в разных базисах. Начнем со случая системы с одним входом.

Теорема 1. Пусть матрицы управляемой системы представлены в двух различных базисах пространства X : $\{A, b\}$ $\{\hat{A}, \hat{b}\}$. Тогда матрица P перехода от представления $\{A, b\}$ к представлению $\{\hat{A}, \hat{b}\}$ единственна и вычисляется по формуле

$$P = [\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{b}] [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1}.$$

Доказательство. Так как система управляема, то матрицы управляемости U и $\hat{U}$ имеют полный ранг. Непосредственное вычисление дает

$$[\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{b}] = [Pb, PAP^{-1}Pb, \dots, PA^{n-1}P^{-1}Pb] = P[b, Ab, \dots, A^{n-1}b].$$

Отсюда сразу следует утверждение теоремы. $\odot$

В случае, когда система имеет более одного входа, матрица U не имеет обратной, так как она не квадратная. В этом случае, однако, тоже существует квадратная матрица ранга n , с помощью которой строится однозначным образом матрица P .

Лемма. Если $(n \times mn)$ -матрица $U := [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ имеет ранг n , то матрица $C = UU'$ тоже имеет ранг n .

Доказательство. Если ранг матрицы U равен n , то ее строки линейно независимы и, значит, определитель матрицы Грама UU' положителен. Матрица UU' имеет полный ранг. $\odot$

Построим теперь матрицу преобразования для общего случая.

Теорема 2. Если управляемая n -мерная система описывается относительно различных базисов в пространстве состояний X парами матриц $\{A, B\}$ и $\{\hat{A}, \hat{B}\}$, то невырожденная матрица P , определяющая преобразование координат $\hat{x} = Px$, порожденное переходом от одного базиса к другому, может быть вычислена по формуле

$$P = \hat{U}U' \{UU'\}^{-1},$$

где $U := [B, AB, \dots, A^{n-r}B]$, $\hat{U} := [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-r}\hat{B}]$, $r = \text{ранг } B = \text{ранг } \hat{B}$.

Доказательство. В силу управляемости системы и согласно лемме имеем

$$\text{ранг } U = \text{ранг } \hat{U} = \text{ранг } UU' = \text{ранг } \hat{U}\hat{U}'.$$

С другой стороны, пользуясь формулами преобразования матриц при переходе к новому базису, получим

$$\begin{aligned} \hat{U} &= [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\ &= [PB, PA(P^{-1}P)B, \dots, PA^{n-1}(P^{-1}P)B] = PU, \quad \hat{U}' = PU'. \end{aligned}$$

Умножая последнее равенство справа на U' и затем справа на $[UU']^{-1}$, получим требуемую формулу для P . Единственность матрицы P , как и в теореме 1, следует из того, что существует только одно линейное преобразование, которое связывает два базиса n -мерного векторного пространства. $\odot$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать такой базис в пространстве X или, что то же, такую матрицу линейного преобразования P , чтобы матрицы системы имели бы «хороший» вид в этом базисе.

Каноническое представление системы с одним входом. Пусть дана линейная управляемая система с одним входом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

и пусть $\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ — характеристический многочлен матрицы A .

Определение 1. Пара матриц

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{УКП})$$

называется *управляемым каноническим представлением* системы с одним входом. $\odot$

Напомним, что матрица A является сопровождающей матрицей многочлена $\varphi_A(\lambda)$ (см. § 5).

О том, что для управляемой системы можно выбрать базис, в котором матрицы системы имеют каноническое представление, свидетельствует следующая

Теорема 3. Пусть дана пара матриц $\{A, b\}$. В пространстве X тогда и только тогда существует

базис, в котором эта пара имеет каноническое представление, когда пара $\{A, b\}$ управляема.

Доказательство. Так как пара $\{A, b\}$ управляема, то n векторов $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ образуют базис в пространстве X , в силу того, что $\text{rang } [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n$. Значит, базисом будет и следующая система векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= A^{n-1}b + \alpha_1 A^{n-2}b + \dots + \alpha_{n-2}Ab + \alpha_{n-1}b, \\ e_2 &= A^{n-2}b + \alpha_1 A^{n-3}b + \dots + \alpha_{n-2}b, \\ &\dots \dots \dots \\ e_{n-1} &= Ab + \alpha_1 b, \\ e_n &= b. \end{aligned}$$

Действительно матрица перехода от базиса $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ к системе векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет треугольный вид

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & & & & 0 \\ \dots & & & & \\ \alpha_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & 1 \\ 0 & & & 1 & \alpha_1 \\ \dots & & & & \\ 0 & 1 & \dots & & \alpha_{n-2} \\ 1 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

и, следовательно, невырождена, так как на ее диагонали стоят единицы. Значит, система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независима и образует базис в пространстве X .

Вектор b в этом базисе имеет каноническое представление $b' = [0, \dots, 0, 1]$. Вычислим представление матрицы A в этом базисе. Для этого воспользуемся правилом вычисления матрицы линейного оператора в произвольном базисе (см. § 7). Первый столбец матрицы A в новом базисе имеет вид

$$Ae_1 = (A^n b + \alpha_1 A^{n-1}b + \dots + \alpha_{n-1}Ab + \alpha_n b) - \alpha_n b,$$

но выражение в скобках равно нулю согласно теореме Кэли — Гамильтона и, следовательно,

$$Ae_1 = -\alpha_n b = -\alpha_n e_n.$$

Вычисляя остальные столбцы матрицы A , получим

$$Ae_2 = A^{n-1}b + \alpha_1 A^{n-2}b + \dots + \alpha_{n-3} A^2b + \alpha_{n-2} Ab = e_1 - \alpha_{n-1} e_n,$$

$$\dots \dots \dots Ae_{n-1} = e_{n-2} - \alpha_2 e_{n-1},$$

$$Ae_n = e_{n-1} - \alpha_1 e_n.$$

Столбцы Ae_i в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ образуют каноническое представление матрицы A . $\odot$

Если пара $\{A, b\}$ не является управляемой, то каноническое представление, вообще говоря, не существует. Например, при $b = 0$ вектор b останется нулевым в любом базисе и, значит, для него не будет существовать канонического представления.

З а м е ч а н и е 1. Если матрицы $\{A, b\}$ управляемой системы заданы, то для того, чтобы вычислить их каноническое представление, достаточно вычислить коэффициенты характеристического многочлена матрицы A .

П р и м е р.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ранг } U = \text{ранг} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix} = 2.$$

Пара $\{A, b\}$ управляема. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 12 - \lambda^2 - 7\lambda = 0.$$

Каноническое представление пары $\{A, b\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 2. Если описание системы с одним входом задано с помощью передаточной функции вида

$$W(p) = \frac{\xi_1 p^{n-1} + \xi_2 p^{n-2} + \dots + \xi_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n},$$

то каноническое представление этой системы (убедитесь в том, что она управляема) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$c = [\xi_n, \xi_{n-1}, \dots, \xi_1].$

Убедитесь непосредственной проверкой, что передаточная функция линейной системы, заданной этими матрицами, совпадает с $W(p)$. Каноническое представление удобно для моделирования, так как матрицы $\{A, b\}$ имеют минимальное число ненулевых элементов. Общая схема моделирования n -мерной полностью управляемой системы с одним входом и одним выходом представлена на рис. 22.2.

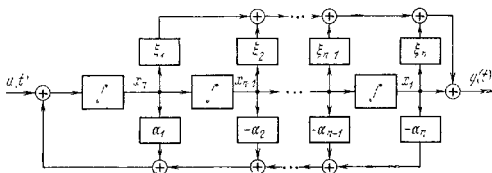


Рис. 22.2.

З а м е ч а н и е 3. Если в качестве базиса пространства X выбрать векторы $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$, то матрицы $\{A, b\}$ управляемой системы с одним входом будут иметь в этом базисе вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проверьте справедливость этого утверждения, воспользовавшись теоремой Кэли — Гамильтона.

З а м е ч а н и е 4. При переходе к новому базису в пространстве X мы иногда не будем использовать специальные обозначения для матриц системы, записанных в разных базисах. Формулы преобразования в этом случае можно понимать как формулы присваивания одним и тем же матрицам (операторам) их значений в разных базисах. Мы будем пользоваться следующим символом для обозначения операции присваивания:

$$A : P^{-1}AP,$$

Эта формула означает, что элементам матрицы A присваиваются значения элементов матрицы $P^{-1}AP$. В дальнейшем при вычислении параметров регуляторов нам придется несколько раз менять базис в пространстве X , и различие всех этих базисов с помощью специальных индексов представляется нам неудобным. Из текста всегда будет ясно, в каком базисе представлены матрицы системы.

Канонические представления системы с многими входами. Мы подробно рассмотрели случай системы с одним входом и получили каноническое представление для матриц управляемой системы. Подобные результаты остаются справедливыми и для линейных стационарных управляемых систем с многими входами. Ввиду того, что подробная запись доказательства в системе с многими входами слишком громоздка, ниже приведены лишь результаты важнейших этапов, в надежде на то, что читатель сделает подробные выкладки самостоятельно.

Рассмотрим управляемую стационарную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \right\} \quad (1С)$$

где, как обычно, матрицы A , B , C имеют размерность $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ соответственно. Выберем в пространстве состояний базис, в котором уравнения системы будут иметь канонический вид. При этом существенным требованием является управляемость системы. Напомним, что если система управляема, то матрица

$$U = [b_1, b_2, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m]$$

(здесь b_i — i -й столбец матрицы $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$) имеет n линейно независимых столбцов. Существует много способов выбрать эти n столбцов так, чтобы сформировать такой базис пространства состояний X , в котором уравнения имели бы каноническую форму. Рассмотрим два таких способа.

Способ 1. Будем перебирать столбцы матрицы U в следующем порядке: $b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{v_1-1}b_1$, до тех пор, пока вектор $A^{v_1}b_1$ не будет выражаться в виде линейной комбинации векторов $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1\}$. Если $v_1 = n$, то система может быть управляема с помощью одного первого столбца b_1 матрицы B , и задача сводится к уже

решенной задаче для системы с одним входом. Если $v_1 < n$, то будем последовательно присоединять к полученному набору столбцы $b_2, Ab_2, \dots$ и т. д. вплоть до $A^{v_1-1}b_2$, пока вектор $A^{v_1}b_2$ не будет выражаться как линейная комбинация всех столбцов набора, т. е. векторов $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, \dots, A^{v_2-1}b_2\}$. Если $v_1 + v_2 < n$, то продолжаем присоединять к полученному набору векторы $b_3, Ab_3, \dots, A^{v_3-1}b_3$ и т. д., убеждаясь каждый раз в том, что всякий новый вектор набора не выражается линейно через выбранные уже векторы. Эту проверку удобно проводить с помощью процесса ортогонализации (см. § 8). Предположим, что $v_1 + v_2 + v_3 = n$ и n векторов $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, \dots, A^{v_2-1}b_2, b_3, \dots, A^{v_3-1}b_3\}$ (1)

линейно независимы. Важное свойство этого набора векторов заключается в том, что вектор $A^v b_i$ можно выразить в виде линейной комбинации всех предшествующих векторов набора. Например, вектор $A^v b_1$ можно выразить как линейную комбинацию векторов $\{b_1, Ab_1, A^2 b_1, \dots, A^{v-1} b_1\}$. Если теперь взять множество векторов (1) в качестве базиса пространства R^n , то матрицы A и B будут в этом базисе иметь следующий вид:

Матрица A	Матрица B
$ \begin{array}{c} \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ * \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{ c } \hline \begin{array}{c} v_1 \times v_1 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ * \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \begin{array}{c} v_2 \times v_2 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ * \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \begin{array}{c} v_3 \times v_3 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ * \\ \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ * \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} $	$ \begin{array}{ c } \hline 1 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 1 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{ c } \hline \vdots \quad b_1 \dots b_m \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline \vdots \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ c } \hline 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \end{array} $

здесь, как и раньше, знаком $*$ обозначены, возможно, пе-

нулевые элементы матрицы A . Это представление пары $\{A, B\}$ называют *первым каноническим представлением* управляемой системы с многими входами [55].

Поскольку набор векторов (1) выбран в качестве базиса, то матрица перехода к новому базису P составлена из столбцов набора (1) и, следовательно, имеет вид

$$P = [p_1, p_2, \dots, p_n] = [b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_s].$$

Можно проверить непосредственно, что i -й столбец приведенной матрицы A является представлением вектора Ap_i в базисе $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Например, представление столбца с номером v_1 , равного $A \cdot A^{v-1}b_1$, имеет вид

$$A^v b_1 = \beta_1 A^{v-1} b_1 + \beta_2 A^{v-2} b_1 + \dots + \beta_v,$$

(где $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v$ — не все нули). Это следует из того, что вектор $A^v b_1$ линейно выражается через систему векторов $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{v-1}b_1\}$ в соответствии со способом построения базиса (1). Заметим, что полученная матрица A является клеточно треугольной матрицей.

Обратите внимание на то, что матрицы A и B обозначаются одной и той же буквой при записи их в разных базисах пространства состояний.

Приведем еще один алгоритм выбора n векторов канонического базиса.

Способ 2. В качестве первых m столбцов набора вышеперечисленных линейно независимых столбцов матрицы B $b_1, b_2, \dots, b_m$. (Предполагаем, что $\text{rang } B = m$.) Присоединяем к ним последовательно столбцы $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_m$ один за одним, проверяя, является ли каждый новый столбец линейно независимым от всех предыдущих столбцов набора. Для осуществления этой проверки используем процедуру ортогонализации (см. § 8). Если какой-либо из новых столбцов выражается в виде линейной комбинации уже выбранных столбцов, то этот столбец выкидываем из набора и переходим к проверке следующего столбца. После того, как столбец Ab_m проверен, переходим к проверке столбцов $A^2 b_1, A^2 b_2, \dots, A^2 b_m$ и т. д. до тех пор, пока не получим n линейно независимых столбцов. Заметим, что если столбец $A^k b_i$ выпадает из набора в силу его линейной зависимости от предшествующих столбцов, то столбцы $A^{k+j} b_i$, где $j > 0$, можно опустить, так как они

дующие ненулевые элементы: $b_{11} = b_{\mu+1,2} = b_{\mu+1,3} = \dots = b_{m-1+1,m} = 1$. Остальные элементы этой матрицы равны нулю. Как и ранее, в том, что матрицы A и B имеют в базисе (2) такой вид, легко убедиться непосредственно.

Сравнивая запись пары матриц $\{A, B\}$ в базисах (1) и (2), мы видим разницу в этих канонических представлениях в следующем.

Матрица A , записанная в базисе (1), имеет три блока на диагонали, в то время как у матрицы A , записанной в базисе (2), имеется ровно m блоков на диагонали.

Если в случае базиса (1) у матрицы B простой вид — лишь у первых трех столбцов, то в базисе (2) эта матрица имеет все столбцы очень простого (канонического) вида. Заметим, что число 3 взято нами в предположении, что $v_1 + v_2 + v_3 = n$. Вообще говоря, это число может быть и другим, но суть дела при этом не меняется.

Кроме того, матрица A в базисе (1) является клеточно-треугольной матрицей, и значит, ее многочлен равен произведению характеристических многочленов ее диагональных клеток. Переставляя векторы в базисе (1) или в базисе (2), можно прийти и к другим каноническим формам.

З а м е ч а н и е 5. В теории регулирования большую роль играют эквивалентные преобразования структурных схем. Аналогом этих преобразований являются преобразования координат в пространстве состояний системы. Обычно считают, что удобнее преобразовывать структурные схемы, чем иметь дело с матрицами. Это, конечно, не всегда так. Пользуясь представлением системы в пространстве состояний, сразу можно выписать каноническое представление ее матриц, а это представление удобно для моделирования и для расчетов, так как матрицы в каноническом представлении имеют минимальное число ненулевых элементов.

Резюмируя содержание этого параграфа, скажем следующее.

1. Для управляемой системы всегда можно выбрать такой базис в пространстве состояний системы, что матрицы системы принимают в этом базисе наиболее простую (каноническую) форму. Выше было приведено доказательство существования канонического базиса и даны алгоритмы его построения как в системе с одним входом,

так и в случае системы с многими входами. Эти базисы играют важную роль при решении задачи конструирования регулятора.

2. Если даны представления матриц системы в различных базисах пространства X , то соответствующая матрица преобразования координат может быть вычислена по явным формулам (теоремы 1, 2).

3. Если дана передаточная функция системы с одним входом и одним выходом, то каноническое представление ее матриц выписывается сразу по виду этой передаточной функции.

4. Введенные здесь канонические представления системы называют иногда управляемыми каноническими представлениями в отличие от идентификационных канонических представлений, которые будут рассмотрены в гл. V.

Задачи. 1. Для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + 1 & 0 & 2 & 0 & -2\lambda \\ \alpha\lambda & 0 & -2 & 0 & \alpha + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

постройте каноническое представление по способам 1 и 2 для пар матриц $\{A, B\}$ и $\{A, C\}$.

2. Убедитесь в том, что система

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

управляема с помощью любого из двух входов. Постройте каноническое представление для $\{A, b_1\}$ и $\{A, b_2\}$, где b_1, b_2 — столбцы матрицы B .

3. Постройте каноническое представление для пар матриц:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & \alpha_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 & -\alpha_7 \\ -\alpha_1 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$б) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

§ 23. Обратная связь «по состоянию» в стационарных системах

Обсудим возможности стационарных обратных связей по состоянию в управляемой системе. При этом важную роль будут играть введенные в § 22 канонические представления линейной системы в пространстве состояний.

Система с одним входом. Здесь основным результатом является

Теорема 1. Пусть линейная стационарная система с одним входом $x(t) = Ax(t) + bu(t)$ управляема и пусть $\varphi_\gamma(\lambda) = \lambda^n - \gamma_1 \lambda^{n-1} - \dots - \gamma_n$ — произвольный нормированный многочлен n -го порядка с вещественными коэффициентами. Тогда существует вектор обратной связи k' такой, что замкнутая система $x(t) = [A - bk']x(t)$ имеет $\varphi_\gamma(\lambda)$ своим характеристическим многочленом.

Доказательство. Обозначим через $\varphi_A = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ характеристический многочлен матрицы A . Поскольку пара $\{A, b\}$ управляема, существует базис в пространстве X , в котором эта пара имеет канонический вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \dots & \gamma_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Обратите внимание на то, что в соответствии с принятым условием мы не меняем обозначения матриц системы при записи их в различных базисах пространства X .)

Выберем теперь компоненты вектора обратной связи по формуле

$$k_{n-i+1} = \gamma_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$[A - bk'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times [k_1, \dots, k_n] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\gamma_n & -\gamma_{n-1} & \dots & -\gamma_1 \end{bmatrix},$$

и значит, $\Phi_{[A-bk']} = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n = \Phi_\gamma(\lambda)$, так как матрица $[A - bk']$ является сопровождающей матрицей многочлена $\Phi_\gamma(\lambda)$. $\odot$

Таким образом, с помощью обратной связи можно совершенно произвольно менять динамику системы, выбирая ее характеристические числа по своему усмотрению. Значит, линейную систему n -го порядка с единственным входом, если она управляема, можно считать эквивалентной любой другой управляемой системе n -го порядка в том смысле, что обе системы с помощью обратной связи можно сделать неразличимыми в пространстве состояний.

Важнейшее значение этой теоремы состоит в том, что она дает возможность синтезировать систему с заданными свойствами. Процедура синтеза, по крайней мере в принципе, чрезвычайно проста.

1. Вычисляем матрицу $U = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ и проверяем, совпадает ли ранг этой матрицы с размерностью системы.

2. Вычисляем характеристический многочлен матрицы A

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n.$$

3. По коэффициентам заданного характеристического многочлена замкнутой системы вычисляем компоненты вектора обратной связи по формулам (1).

З а м е ч а н и е 1. Нас пока не интересует уравнение наблюдения $y(t)$ $Sx(t)$, поскольку все переменные вектора состояния мы считаем выходными величинами. Это равносильно тому, что матрица C равна единичной матрице.

З а м е ч а н и е 2. Если в качестве базиса пространства состояний выбраны векторы $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$, то в этом базисе матрицы системы имеют вид (см. замечание 3 § 22 и пример 3 § 7)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если многочлен замкнутой системы выбран в виде $\varphi_y(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, то вектор обратной связи k' , полученный в каноническом базисе, необходимо преобразовать с помощью матрицы перехода от канонического базиса к базису $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$. Эта матрица приведена при доказательстве теоремы 1 § 22. Компоненты вектора вычислим по формулам

$$k' : = k'P^{-1} =$$

$$= [\gamma_n - \alpha_n, \dots, \gamma_1 - \alpha_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \\ 1 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

или подробно:

$$k_1 = \gamma_1 - \alpha_1,$$

$$k_2 = (\gamma_2 - \alpha_2) - \alpha_1(\gamma_1 - \alpha_1),$$

$$k_3 = (\gamma_3 - \alpha_3) - \alpha_1(\gamma_2 - \alpha_2) - \alpha_2(\gamma_1 - \alpha_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_n = (\gamma_n - \alpha_n) - \alpha_1(\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}) - \dots - \alpha_{n-1}(\gamma_1 - \alpha_1).$$

З а м е ч а н и е 3. Хотя набор характеристических чисел заданного многочлена $\varphi_y(\lambda)$ назван произвольным, тем не менее имеется одно существенное ограничение. Многочлен, выбираемый в качестве характеристического

многочлена замкнутой системы, имеет вещественные коэффициенты по условиям физической реализуемости системы, поэтому всякое комплексное число присутствует в наборе корней этого многочлена вместе со своим сопряженным.

Пример 1. Пусть дана система

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Эта система полностью управляема, так как

$$\text{ранг } U = \text{ранг} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2.$$

Вычислим характеристический многочлен матрицы A $\varphi_A = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$. Каноническое представление пары $\{A, b\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть корни желаемого характеристического многочлена замкнутой системы равны $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$. Тогда

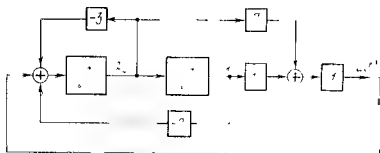


Рис. 23.1.

заданный характеристический многочлен имеет вид

$$\varphi_y(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 3, \quad \gamma_1 = 4, \quad \gamma_2 = 3.$$

Компоненты вектора обратной связи, обеспечивающей наличие у системы этого многочлена, вычисляем по формулам (1) теоремы 1:

$$k_1 = \gamma_2 - \alpha_2 = 3 - 2 = 1, \quad k_2 = \gamma_1 - \alpha_1 = 4 + 3 = 7.$$

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 23.1.

Система с многими входами. Рассмотрим систему с многими входами

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (\text{ЛС})$$

Будем искать стационарную обратную связь в виде $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, где $\mathbf{K}$ — матрица размеров $m \times n$. Тогда уравнения замкнутой системы примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{A} - \mathbf{BK}]\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Можно доказать теорему, в точности соответствующую случаю системы с одним входом. Именно, если система управляема, то возможен такой выбор $\mathbf{K}$, что характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ будет совпадать с любым, наперед заданным многочленом с вещественными коэффициентами вида $\varphi_y(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$. Ясно, что практический интерес представляют только такие многочлены $\varphi_y(\lambda)$, корни которых расположены строго слева от мнимой оси. В этом случае замкнутая система является асимптотически устойчивой (см. § 15).

Необходимый результат получим в два этапа. Сначала построим такую обратную связь по состоянию, чтобы полученная система с обратной связью была бы управляема с помощью одного входа (задача 6 § 21), а затем воспользуемся результатами, приведенными ранее для системы с одним входом.

Так как рассматриваемая система управляема, то матрица

$$\begin{aligned}U &= [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \\ &= [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{Ab}_1, \dots, \mathbf{Ab}_m, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_m]\end{aligned}$$

имеет ранг n . Если в матрице $\mathbf{B}$ есть столбец $\mathbf{b}_i$ такой, что матрица $[\mathbf{b}_i, \mathbf{Ab}_i, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i]$ имеет ранг n , то система управляема с помощью единственной компоненты вектора управления, именно компоненты $u_i(t)$. Если такого столбца в матрице нет, то нельзя получить желаемое управление с помощью одного входа $u_i(t)$. Требуется участие двух или более компонент вектора $\mathbf{u}(t)$. Однако введением соответствующей обратной связи можно привести

линейную систему с многими входами к системе, управляемой с помощью одного входа. Сформулируем точно соответствующий результат.

Т е о р е м а 2. Пусть $\{A, B\}$ — управляемая пара матриц и пусть $b_1, b_2, \dots, b_m$ — столбцы матрицы B . Тогда для любого $b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$, существует постоянная матрица K_i размеров $m \times n$ такая, что пара матриц $\{A - BK_i, b_i\}$ управляема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности возьмем $i = 1$. Так как система управляема, то матрица $U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ имеет ранг n . Следовательно, в U имеется n линейно независимых столбцов. Выберем эти столбцы в соответствии со способом 1 (см. § 22). Пусть это будут векторы

$$\{b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{v_2-1}b_2, b_3, Ab_3, \dots, A^{v_3-1}b_3\}.$$

Здесь $v_1 + v_2 + v_3 = n$. Определим матрицу P размеров $n \times n$, в столбцах которой размещены эти векторы:

$$P = [b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, \dots, A^{v_3-1}b_3]$$

и определим матрицу S размеров $m \times n$ следующим образом:

$$S = [0, 0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_3, 0, \dots, 0, 0],$$

где e_2 — v_1 -й столбец, e_3 — $(v_1 + v_2)$ -й столбец этой матрицы, общее число столбцов которой равно $v_1 + v_2 + v_3$; через e_i обозначен i -й столбец единичной матрицы размеров $m \times m$.

Теперь мы покажем, что матрица K_1 , определяемая в виде $K_1 = SP^{-1}$, удовлетворяет условиям теоремы, т. е. пара $\{A - BK_1, b_1\}$ является управляемой. Сначала перепишем матрицу $S = K_1P$ в виде

$$\begin{aligned} S &= K_1[b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, \dots, A^{v_3-1}b_3] = \\ &= [0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_3, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

Это матричное равенство соответствует следующему набору векторных равенств:

$$\left. \begin{aligned} K_1 b_1 &= 0, & K_1 A b_1 &= 0, & K_1 A^2 b_1 &= 0, \dots, & K_1 A^{v_1-1} b_1 &= e_2, \\ K_1 b_2 &= 0, & K_1 A b_2 &= 0, & K_1 A^2 b_2 &= 0, \dots, & K_1 A^{v_2-1} b_2 &= e_3, \\ K_1 b_3 &= 0, & K_1 A b_3 &= 0, & K_1 A^2 b_3 &= 0, \dots, & K_1 A^{v_3-1} b_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

$w = -Mx$, где матрица M имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

После введения этой обратной связи уравнения системы примут вид

$$\dot{x}(t) = [A - BK_1 - BM]x(t) - [A - BK_1 - b_1 m]x(t).$$

Так как пара $\{A - BK_1, b_1\}$ управляема, то характеристический многочлен матрицы можно выбрать произвольно за счет выбора вектор-строки m (см. соответствующую теорему для системы с одним входом — теорему 1). Объединяя обратную связь $u(t) = w(t) - K_1 x(t)$ и обратную связь $w = -Mx(t)$, имеем $u(t) = (-K_1 - M)x(t) = -Kx(t)$. $\odot$

Матрицы K_1 и M можно вычислить, используя приведенные выше алгоритмы (теоремы 1 и 2).

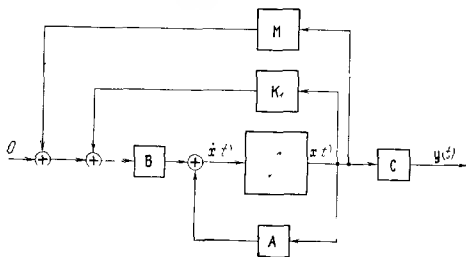


Рис. 23.2.

Значит, K вычисляется по замкнутым конечным формулам. Эти вычисления удобно проводить, составив программу для ЦВМ.

Заметим, что матрица K в только что доказанной теореме не единственна. Есть много различных способов выбора K . Например, если матрица K_2 выбрана так, что пара

матриц $\{A, -BK_2, b_2\}$ управляема, то мы получим другую матрицу K . В литературе встречаются другие способы вычисления матрицы K , отличные от приведенного. Приведенный способ представляется наиболее простым как с точки зрения компактности его изложения, так и с точки зрения удобства для практических вычислений. (См. также [55].)

Еще раз напомним, что построение канонического базиса по способу 1 выполнено в предположении, что $v_1 + v_2 + v_3 = n$, т. е. что для управления системой достаточно первых трех столбцов. Обобщение на случай произвольного числа столбцов не вызывает затруднений.

На рис. 23.2 приведена структурная схема системы с многими входами, охваченной такой обратной связью по состоянию, которая обеспечивает заданную динамику замкнутой системы. Обозначения на рисунке соответствуют обозначениям доказанной теоремы.

Применим полученные алгоритмы для вычисления обратной связи в системе третьего порядка с тремя входами.

Пример 2. Пусть матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $P = B = E$. В соответствии с теоремой 3 выберем матрицу S в виде

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица обратной связи

$$K_1 = SP^{-1} = SE = S.$$

Полученная матрица

$$[A - BK_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

управляема с помощью одного входа u_1 . Действительно, пара матриц

$$\{A - BK_1, b_1\}, \quad b_1 = [1, 0, 0]$$

управляема, так как $\text{ранг } U = 3$. $\odot$

Неограниченные возможности обратных связей реализуются в том случае, когда все переменные состояния доступны для измерения в качестве выходных величин системы. Обычно это не имеет места на практике. Поэтому необходимо решать задачу получения приемлемой оценки вектора состояния. Этой задаче посвящена гл. V.

Задачи. 1. Вычислите такой вектор обратной связи для системы, приведенной в примере 1, чтобы замкнутая система была бы генератором синусоидальных колебаний частоты ω , т. е.

$$x_1 = \sin \omega t.$$

2. В той же системе выберите обратную связь так, чтобы корни замкнутой системы были равны $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -1$.

3. Вычислите обратную связь в примере 2 такую, чтобы характеристические числа замкнутой системы совпадали с числами $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Нарисуйте структурную схему полученной системы.

4. Воспользовавшись теоремой 2, выберите матрицу обратной связи K в системе, заданной матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

так, чтобы система с обратной связью была бы управляема с помощью третьего столбца матрицы B .

5. Для системы, приведенной в задаче 1 § 22, постройте обратную связь по состоянию такую, чтобы замкнутая система имела бы следующие характеристические числа: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, $\lambda_{3,4} = -5 \pm 2i$, $\lambda_5 = \lambda_6 = -2$.

6. Для системы задачи 2 § 22 рассчитайте коэффициенты обратной связи, обеспечивающей равенство всех собственных чисел замкнутой системы: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

7. (Tzafestas, 1975.) Пусть управляемая пара $\{A, b\}$ задана в канонической форме, т. е. $b = [0 \dots 0 \ 1]$ и пусть L — устойчивая жорданова матрица, собственные числа которой совпадают с желаемыми собственными числами этой системы, замкнутой с помощью стационарной обратной связи вида $u = k'x(t)$. Тогда существует неособенная матрица T , такая что выполнено равенство

$$A + bk' = TLT^{-1}. \quad (1)$$

Получите явные формулы для последовательного вычисления матриц k' и T по уравнению (1). Распространите полученные результаты на многомерные системы, считая, что управляемая пара $\{A, B\}$ имеет каноническое представление, приведенное на стр. 244.

ГЛАВА V

ИДЕНТИФИКАТОРЫ СОСТОЯНИЯ

Для линейной стационарной управляемой системы нами установлено следующее: 1) Существует управление, которое переводит любое состояние x в начало координат за произвольно малое время. 2) Это управление может быть реализовано в виде нестационарной обратной связи. 3) Если ограничиться только стационарными линейными законами управления, то можно произвольно менять динамику замкнутой системы, в том случае, если все компоненты вектора состояния доступны для измерения.

На практике, однако, все компоненты вектора состояний не доступны для измерения, либо потому, что число измерительных устройств ограничено, либо потому, что часть переменных состояний в принципе нельзя измерить. Обычно выходными величинами объекта служат лишь отдельные компоненты вектора состояний, либо линейные комбинации этих компонент.

Таким образом, для того, чтобы воспользоваться результатами, связанными с неограниченными возможностями обратной связи по состоянию, необходимо найти разумную замену (оценку) для вектора состояния системы. Для оценки состояния естественно воспользоваться информацией о входных и выходных величинах системы и о ее структуре (матрицах A , B , C).

В этой главе будет получено решение задачи оценки состояния. Сначала мы введем необходимые понятия и сформулируем условия, которым должен удовлетворять объект, чтобы задача оценки его состояния имела решение. Далее обсудим связь задачи управления и задачи оценки состояния и получим уравнения идентификаторов — динамических систем, формирующих оценку состояния в стационарном случае.

§ 24. Наблюдаемость и идентифицируемость

Основные положения. Наша цель будет состоять в том, чтобы для данной линейной системы восстановить вектор состояния $x(t)$ или найти оценку этого вектора по данным о входах $u(t)$ и выходах $y(t)$ системы. Оценку состояния системы обозначим $\hat{x}(t)$. Близость оценки $\hat{x}(t)$ к истинному вектору состояния $x(t)$ можно понимать, по крайней мере, в двух смыслах: либо как стремление ошибки оценки к нулю, т. е. $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, либо как точное совпадение вектора состояния $x(t)$ и вектора оценки $\hat{x}(t)$ в момент $t = t_0$ после наблюдения выходных переменных объекта в течение конечного отрезка времени $[t_{-1}, t_0]$ при $t_{-1} < t_0$ или $[t_0, t_1]$ при $t_1 > t_0$.

Если систему оценки состояния удастся построить хотя бы в одном из указанных смыслов, то возникает вопрос, нельзя ли построить регулятор, который состоял бы из системы оценки состояния и обратной связи, выбранной в предположении, что вектор состояния точно известен. Эта задача будет решена в гл. VI.

В нестационарной линейной системе будем различать следующие две задачи об оценке текущего состояния системы.

Задачей наблюдения назовем задачу оценки состояния системы в момент времени t_0 по известным входным и выходным воздействиям, измеренным в будущем, т. е. по данным о $u(t)$ и $y(t)$ при $t \geq t_0$.

Задачей идентификации будем называть задачу определения состояния системы в момент времени t_0 по данным о входных и выходных величинах, измеренных в прошлом, т. е. по данным $y(t)$ и $u(t)$ при $t \leq t_0$.

План решения этих задач следующий. Мы дадим определение ненаблюдаемого и неидентифицируемого события линейной системы. Введем критерии, сформулированные в виде необходимых и достаточных условий того, что событие является неидентифицируемым или ненаблюдаемым. Покажем для стационарного случая, что неидентифицируемые события действительно можно идентифицировать. В заключении обсудим дуальность задачи управления и задачи оценки состояния.

Перейдем к точным определениям.

О п р е д е л е н и е 1. Событие (t_0, x) линейной системы (ЛС) является *неидентифицируемым* тогда и только тогда, когда $y(t; t_0, x_0, 0) = 0$ при всех $t \leq t_0$. $\odot$

Аналогично определяется ненаблюдаемое событие.

О п р е д е л е н и е 2. Событие (t_0, x) линейной системы (ЛС) является *ненаблюдаемым* тогда и только тогда, когда $y(t; t_0, x_0, 0) = 0$ при всех $t \geq t_0$. $\odot$

Согласно этим определениям событие $(t_0, 0)$ является ненаблюдаемым и неидентифицируемым.

Смысл этих определений в следующем. Если на входе системы имеется нулевое управляющее воздействие, а начальное состояние отлично от нуля, то неидентифицируемым и ненаблюдаемым состояниям системы соответствуют нулевые выходные величины.

Введем понятия наблюдаемой и идентифицируемой системы.

О п р е д е л е н и е 3. Линейная система является *наблюдаемой* в момент времени t_0 , если ни одно событие (t_0, x_0) не является ненаблюдаемым, за исключением события $(t_0, 0)$. $\odot$

О п р е д е л е н и е 4. Линейная система является *идентифицируемой*, если ни одно событие (t_0, x_0) не является неидентифицируемым, за исключением события $(t_0, 0)$. $\odot$

Заметим, что из того, что система идентифицируема, еще не следует, что можно построить хорошую оценку ее состояния. Это предстоит еще доказать. Собственно, из того, что система идентифицируема, следует лишь, что при ненулевом начальном состоянии свободной системы (управление $u(t) = 0$) ее выходные параметры являются ненулевыми. Другими словами, ненулевое состояние системы вызывает какое-то изменение выходов системы во времени.

Пример неидентифицируемой системы приведен на рис. 24.1. Пусть $u(t) = 0$ и входная цепь разорвана, а в индуктивности имеется начальный ток i_0 , и пусть $i(t) = x_1(t)$. Ясно, что нельзя оценить величину этого тока по наблюдениям выходного напряжения $y(t)$ или даже обеих величин $y(t)$ и $u(t)$.

З а м е ч а н и е. Часто не делают различия между задачей наблюдения и задачей идентификации, объединяя оба эти понятия термином *наблюдаемость*. Иногда опреде-

ляют наблюдаемую систему как систему, в которой по прошлым значениям выходных величин можно судить о состоянии в настоящий момент времени. Мы определили эту задачу как задачу идентификации, следуя Калману [24]. ⊙

В стационарной системе идентифицируемость эквивалентна наблюдаемости, и поэтому любое из этих понятий

можно использовать для обозначения задачи построения оценки состояния.

Критерий неидентифицируемости. Сформулируем критерий неидентифицируемости и ненаблюдаемости. Эти критерии аналогичны критериям достижимости и управляемости, но доказательство соответствующих теорем

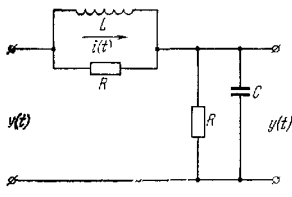


Рис. 24.1.

зывается существенно проще, поскольку в данном случае предстоит лишь показать, в каком случае систему нельзя идентифицировать (наблюдать), а нет необходимости строить процедуру идентификации. Критерий неидентифицируемости сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (критерий неидентифицируемости). Событие (t_0, x) линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C(t)x(t) \quad (\text{ЛС})$$

является неидентифицируемым тогда и только тогда, когда x принадлежит ядру линейного преобразования

$$M(t_{-1}, t_0) = \int_{t_{-1}}^{t_0} \Phi'(\sigma, t_0) C'(\sigma) C(\sigma) \Phi(\sigma, t_0) d\sigma;$$

здесь, очевидно, $M(t_{-1}, t_0)$ — матрица размеров $n \times n$.

Достаточность. Пусть x принадлежит ядру $M(t_{-1}, t_0)$. Тогда по определению ядра линейного оператора имеем

$$M(t_{-1}, t_0)x = 0. \quad (1)$$

Обозначим матрицу $C(\sigma)\Phi(\sigma, t_0) = N(\sigma, t_0)$, тогда

$$N'(\sigma, t_0) = [C(\sigma)\Phi(\sigma, t_0)]' = \Phi'(\sigma, t_0) C'(\sigma),$$

и формулу (1) можно переписать в виде

$$M(t_{-1}, t_0)x = \int_{t_{-1}}^{t_0} N'(\sigma, t_0) N(\sigma, t_0) x d\sigma = 0.$$

Умножив это равенство слева на x' , получим

$$x'M(t_{-1}, t_0)x = \int_{t_{-1}}^{t_0} x'N'(\sigma, t_0) N(\sigma, t_0) x d\sigma,$$

или, замечая, что под знаком интеграла стоит норма вектора $N(\sigma, t_0)x$ (поскольку $[N(\sigma, t_0)x]' = x'N'(\sigma, t_0)$), получим

$$x'M(t_{-1}, t_0)x = \int_{t_{-1}}^{t_0} \|N(\sigma, t_0)x\|^2 d\sigma = 0.$$

Но это равенство возможно тогда и только тогда, когда $N(\sigma, t_0)x \equiv 0$ при всех $\sigma \in [t_{-1}, t_0]$. Значит,

$$N(\sigma, t_0)x = C(\sigma)\Phi(\sigma, t_0)x = y(\sigma; t_0, x, 0) = 0,$$

что как раз и соответствует определению неидентифицируемого события.

Необходимость. Пусть событие (t_0, x) неидентифицируемо, т. е. при любом $t_{-1} < t_0$ имеет место равенство $y(t_{-1}; t_0, x, 0) = 0$. Из формулы

$$x'M(t_{-1}, t_0)x = \int_{t_{-1}}^{t_0} \|C(\sigma)\Phi(\sigma, t)x\|^2 d\sigma$$

следует, что $x'M(t_{-1}, t_0)x = 0$, поскольку

$$y(t_{-1}; t_0, x, 0) = C(t_{-1})\Phi(t_{-1}, t_0)x \equiv 0$$

при любом $t_{-1} \leq t_0$. Но это и означает, что $M(t_{-1}, t_0)x = 0$, т. е. x принадлежит ядру $M(t_{-1}, t_0)$. $\odot$

Совершенно аналогично доказывается и критерий ненаблюдаемости.

Теорема 2 (критерий ненаблюдаемости). Событие (t_0, x) линейной системы (ЛС) является ненаблюдаемым

тогда и только тогда, когда x принадлежит ядру оператора $\hat{M}(t_0, t_1)$, где

$$\hat{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(\sigma, t_0) C'(\sigma) C(\sigma) \Phi(\sigma, t_0) d\sigma. \odot$$

Задача точной оценки состояния. Покажем теперь, что ненаблюдаемое событие можно точно восстановить по данным наблюдения на конечном отрезке времени. Эта задача аналогична задаче вычисления управления, переводящего любое событие линейной управляемой системы в начало координат.

Пусть система задана матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и известно входное воздействие $u(t)$ для $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда ясно, что выход такой системы может быть выражен в виде

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x(t_0) + y_1(t),$$

где $y_1(t)$ — известная функция

$$y_1(t) = \int_{t_0}^t C(t) \Phi(t, \sigma) B(\sigma) u(\sigma) d\sigma,$$

которая не зависит от $x(t_0)$. Поэтому для того, чтобы судить о $x(t_0)$ по данным о выходе системы, достаточно рассмотреть однородную систему

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t), \quad y(t) = C(t) x(t).$$

Функция $y_1(t)$ может быть вычислена единственным образом по известным $B(t)$, $C(t)$, $u(t)$.

Л е м м а. Пусть $C(t)$ — матрица $p \times n$, элементы которой непрерывны на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Ядро преобразования $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^p [t_0, t_1]$, определенного соотношениями $L(x(t)) = C(t) x(t)$, совпадает с ядром преобразования

$$\hat{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} C'(t) C(t) dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x(t_0) = x_0$ принадлежит ядру преобразования $\hat{M}(t_0, t_1)$, то $\hat{M}(t_0, t_1) x_0 = 0$,

и значит, $x'_0 \hat{M}(t_0, t_1) x_0 = 0$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} x'_0 C'(t) C(t) x_0 dt = \int_{t_0}^{t_1} \|C(t) x_0\|^2 dt = 0.$$

Поскольку $C(t)$ — непрерывная функция, то $C(t) x_0 = 0$ при любом $t_0 \leq t \leq t_1$, и поэтому $C(t) x_0 \equiv 0$. Обратно, если $C(t) x_0 = 0$, то $C'(t) C(t) x_0 = 0$ и поэтому интеграл $\int_{t_0}^{t_1} C'(t) C(t) x_0 dt$ равен нулю. Значит, $\hat{M}(t_0, t_1) x_0 = 0$. $\odot$

Т е о р е м а 3. Если матрицы линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = C(t)x(t)$$

заданы на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то можно определить $x(t_0)$ с точностью до постоянного вектора, который лежит в ядре оператора

$$\hat{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt.$$

В частности, $x(t_0)$ можно определить единственным образом, если матрица $\hat{M}(t_0, t_1)$ — неособенная. Более того, нельзя отличить, зная $y(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, начальное состояние x_1 от начального состояния x_2 , если вектор $x_1 - x_2$ лежит в ядре оператора $\hat{M}(t_0, t_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно уравнению системы имеем

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0).$$

Домножив это равенство слева на $\Phi'(t, t_0) C'(t)$, получим $\Phi'(t, t_0) C'(t) y(t) = \Phi'(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi(t, t_0) x(t_0)$. Интегрируя теперь на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) C'(t) y(t) dt = \hat{M}(t_0, t_1) x(t_0).$$

Так как левая часть этого равенства известна (функцию $y(t)$ мы измеряем на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$), то значение $x(t_0)$ может быть определено с точностью до аддитивно добавленного постоянного вектора, лежащего в ядре

оператора $\hat{M}(t_0, t_1)$. Если же $\hat{M}(t_0, t_1)$ несингулярна, то

$$x(t_0) = \hat{M}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) C'(t) y(t) dt,$$

и, таким образом, $x(t_0)$ определен однозначно.

Предположим теперь, что $x_1 - x_2$ лежит в ядре оператора $\hat{M}(t_0, t_1)$. Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — выходные величины, соответствующие начальным условиям x_1 и x_2 . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|y_1(t) - y_2(t)\|^2 dt &= \int_{t_0}^{t_1} \|C(t) \Phi(t, t_0) x_1 - C(t) \Phi(t, t_0) x_2\|^2 dt = \\ &= (x_1 - x_2)' \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) C'(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt (x_1 - x_2) = \\ &= (x_1 - x_2)' M(t_0, t_1) (x_1 - x_2) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $y_1(t) = y_2(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, и потому x_1 и x_2 неразличимы. $\odot$

Роль матрицы $\hat{M}(t_0, t_1)$ аналогична роли матрицы $W(t_0, t_1)$, которую мы называли грамианом управляемости. По аналогии матрицу $\hat{M}(t_0, t_1)$ называют *грамианом наблюдаемости*.

Т е о р е м а 4 (свойства грамнана наблюдаемости). Матрица $\hat{M}(t_0, t_1)$, определенная в формулировке теоремы 3, имеет следующие свойства:

1. $\hat{M}(t_0, t_1)$ — симметрическая матрица.
2. $\hat{M}(t_0, t_1)$ неотрицательно определена для $t_1 \geq t_0$.
3. $\hat{M}(t_0, t_1)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{M}(t, t_1) &= -A'(t) \hat{M}(t, t_1) - \hat{M}(t, t_1) A(t) - C'(t) C(t), \\ \hat{M}(t_0, t_0) &= 0. \end{aligned}$$

4. $\hat{M}(t_0, t_1)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\hat{M}(t_0, t_1) = \hat{M}(t_0, t) + \Phi'(t, t_0) \hat{M}(t, t_1) \Phi(t, t_0). \odot$$

Теорема доказывается аналогично теореме 2 § 19, и читателю предлагается провести это доказательство в качестве упражнения.

Дуальность задач управления и задач оценки состояния. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что оператор W , введенный в § 19, и оператор M из теоремы 1 как бы дополняют друг друга. Преобразуем подынтегральную функцию оператора W в подынтегральную функцию оператора M . Для этого произведем замену переменной интегрирования $\sigma = t_0 - \alpha$ в операторе $M(t_{-1}, t_0)$. Тогда матрицы $W(t_0, t_1)$ и $M(t_{-1}, t_0)$ примут вид

$$\begin{aligned} W(t_0, t_1) &= \\ &= \int_0^{t_1 - t_0} \Phi(t_0, t_0 + \alpha) B(t_0 + \alpha) B'(t_0 + \alpha) \Phi'(t_0, t_0 + \alpha) d\alpha, \\ M(t_{-1}, t_0) &= \\ &= \int_0^{t_0 - t_{-1}} \Phi'(t_0 - \alpha, t_0) C'(t_0 - \alpha) C(t_0 - \alpha) \Phi(t_0 - \alpha, t_0) d\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что преобразование подынтегральной функции оператора $W(t_0, t_1)$ в подынтегральную функцию оператора $M(t_{-1}, t_0)$ заключается в следующей замене:

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, t_0 + \alpha) &\rightarrow \Phi'(t_0 - \alpha, t_0), \\ B(t_0 + \alpha) &\rightarrow C'(t_0 - \alpha). \end{aligned}$$

Но в соответствии со свойствами 6 и 7 переходной матрицы § 10, матрицы $\Phi(t_0, t_0 + \alpha)$ и $\Phi'(t_0 - \alpha, t_0)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t_0, t_0 + \alpha)}{d\alpha} &= -\Phi(t_0, t_0 + \alpha) A(t_0 + \alpha), \\ \frac{d\Phi'(t_0 - \alpha, t_0)}{d\alpha} &= -\Phi'(t_0 - \alpha, t_0) A'(t_0 - \alpha). \end{aligned}$$

Другими словами, преобразование

$$\Phi(t_0, t_0 + \alpha) \rightarrow \Phi'(t_0 - \alpha, t_0)$$

равносильно следующему преобразованию матрицы $A(t)$:

$$A(t_0 + \alpha) \rightarrow A'(t_0 - \alpha).$$

Значит, для того чтобы осуществить преобразование подынтегральной функции оператора $W(t_0, t_1)$ в подынтегральную функцию оператора $M(t_{-1}, t_0)$, необходимо

выполнить следующее преобразование матриц системы:

$$\left. \begin{aligned} A(t_0 + \alpha) &\rightarrow A'(t_0 - \alpha), \\ B(t_0 + \alpha) &\rightarrow C'(t_0 - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Это преобразование заключается в зеркальном отображении всех функций, соответствующих этим матрицам, относительно точки t_0 , переходе к транспонированным матрицам и замене B на C .

Предположим, что пара матриц $\{A, B\}$ определяет в момент времени t_0 полностью управляемую систему, т. е. существует t такое, что $\text{ранг } W(t_0, t) = n$. Если эту пару матриц подставить в оператор $M(t_{-1}, t_0)$, предварительно отобразив их зеркально относительно точки t_0 и перейдя к транспонированным матрицам, то оператор $M(t_{-1}, t_0)$ в этом случае будет иметь полный ранг, следовательно, ни одно состояние системы $\dot{x}(t) = A'(2t_0 - t)x(t)$, $y(t) = B'(2t_0 - t)x(t)$ не будет принадлежать его ядру, т. е. все эти состояния будут идентифицируемы. Положим $t_0 + \alpha = t$, тогда преобразование (2) примет вид

$$\begin{aligned} A(t) &\rightarrow A'(2t_0 - t), \\ B(t) &\rightarrow C'(2t_0 - t). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. *Пара матриц $\{A(t), B(t)\}$ определяет линейную систему, которая в момент времени t_0 управляема тогда и только тогда, когда пара матриц $\tilde{A}(t) = A'(2t_0 - t)$, $\tilde{C}(t) = B'(2t_0 - t)$ определяет систему, которая в момент времени t_0 идентифицируема. $\odot$*

Дуальность понятий наблюдаемости и достижимости устанавливает

Т е о р е м а 6. *Пара матриц $A(t), C(t)$ определяет линейную систему, которая в момент времени t_0 наблюдаема, тогда и только тогда, когда пара матриц*

$$\tilde{A}(t) = A'(2t_0 - t), \quad \tilde{B}(t) = C'(2t_0 - t)$$

определяет систему, которая в момент времени t_0 достижима. $\odot$

Перейдем к стационарному случаю. В стационарном случае переходная матрица системы имеет вид $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ и операторы $W(t_0, t_1)$, $M(t_{-1}, t_0)$ можно

представить так:

$$W(t_0, t_1) = \int_0^{t_1 - t_0} e^{-A\sigma} B B' e^{-A'\sigma} d\sigma,$$

$$M(t_{-1}, t_0) = \int_0^{t_0 - t_{-1}} e^{-A'\sigma} C' C e^{-A\sigma} d\sigma.$$

Так как оператор $W(t_0, t_1)$ достигает полного ранга при любом $t_1 > t_0$ в том и только в том случае, когда пара матриц $\{A, B\}$ является управляемой, то и оператор $M(t_{-1}, t_0)$ достигает полного ранга при любом $t_0 > t_{-1}$ тогда и только тогда, когда пара матриц $\{A, C\}$ является управляемой. Но если оператор $M(t_{-1}, t_0)$ имеет полный ранг, то ни одно состояние, кроме нулевого, не принадлежит ядру этого оператора и, следовательно, система является идентифицируемой. Таким образом, нами доказана

Теорема 7. *Пара постоянных матриц $\{A, C\}$ определяет идентифицируемую систему тогда и только тогда, когда пара матриц $\{A', C'\}$ определяет управляемую систему. ○*

Но если пара $\{A, C\}$ идентифицируема, то из определения оператора $\hat{M}(t_0, t_1)$ непосредственно следует, что эта пара является и наблюдаемой. Действительно,

$$\hat{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A'(\sigma - t_0)} C' C e^{A(\sigma - t_0)} d\sigma,$$

после замены $u = \sigma - t_0$

$$\hat{M}(t_0, t_1) = \int_0^{t_1 - t_0} e^{A'u} C' C e^{Au} du,$$

и $\hat{M}(t_0, t_1)$ достигает полного ранга при любом $t_1 > t_0$. Значит, из идентифицируемости пары матриц $\{A, C\}$ следует наблюдаемость этой пары матриц. Теперь, вспоминая формулировку критерия управляемости стационарной системы, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пара матриц $\{A, C\}$ определяет идентифицируемую и наблюдаемую систему в том и только в том случае, если ранг D равен рангу $[C', A'C', \dots, (A')^{n-1}C'] = n$.*

Здесь D — матрица размеров $n \times pr$, составленная из столбцов матриц C' , $A'C'$, ..., $(A')^{n-s}C'$, каждая из которых имеет размерность $n \times p$, s — ранг матрицы C . $\odot$

Теоремы 5, 6 и 7, 8 свидетельствуют о том, что понятие идентифицируемости дополняет понятие управляемости, а понятие наблюдаемости дополняет понятие достижимости. Говорят, что достижимость дуальна наблюдаемости, а управляемость дуальна идентифицируемости. В стационарном случае идентифицируемость эквивалентна наблюдаемости, а управляемость эквивалентна достижимости, и справедлива следующая

Теорема 9. *Линейная стационарная система*

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

является наблюдаемой тогда и только тогда, когда система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A'x(t) + C'u(t), \\ y(t) &= B'x(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

является управляемой. Здесь A , B , C — матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ соответственно. Вектор $u(t)$ в системе (3) имеет размерность $m \times 1$, а в системе (4) вектор $u(t)$ имеет размерность $p \times 1$. $\odot$

Пример. Пусть система задана матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0];$$

так как $\text{ранг } [B, AB, A^2B] = \text{ранг } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$, то система управляема и достижима. Матрица идентифицируемости

$$D = [C', A'C', A''C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

тоже имеет ранг, равный 3. Следовательно, система наблюдаема и идентифицируема. $\odot$

Дуальность задач управления и задач оценки состояния позволяет воспользоваться результатами, полученными при решении задачи управления с помощью обратной

связи в стационарной системе, для решения задачи построения оценки состояния этой системы.

Задачи. 1. Переменная $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0,$$

значение $x(t)$ известно при $t = \pi, 2\pi, \dots$. Можно ли определить $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ по этим данным?

2. Покажите, что линейная стационарная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

управляема тогда и только тогда, когда система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -A'\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{y}(t) = B'\mathbf{x}(t)$$

идентифицируема.

3. Являются ли идентифицируемыми пары матриц:

$$a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T$$

§ 25. Асимптотические идентификаторы n -го порядка

Формулы для точного восстановления вектора состояний системы по данным наблюдения за входными и выходными переменными на конечном отрезке времени были получены при доказательстве теоремы 3 § 24. Эти результаты подобны тем, которые были получены при решении задачи о построении управления, переводящего систему в заданную точку пространства состояний за фиксированное время (теорема 1 § 19).

В важнейшем частном случае стационарной системы мы попытаемся построить такую оценку вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}(t)$, чтобы $\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Другого, к сожалению, нельзя потребовать, так как стационарный идентификатор не может, в принципе, обеспечить точную идентификацию состояния системы, точно так же, как стационарная обратная связь не пригодна для приведения системы точно в заданное состояние за конечное время. Но, так же как и в случае управления с помощью обратной

связи по состоянию, характеристические числа идентификатора можно назначать по своему усмотрению, совершенно произвольным образом меняя характер стремления оценки $\hat{x}(t)$ к состоянию $x(t)$.

В этом разделе будут построены уравнения динамической системы, входами которой являются входы и выходы исходной линейной системы, а выходами компоненты вектора $\hat{x}(t)$ — оценки вектора состояний $x(t)$.

О п р е д е л е н и е 1. Динамическую систему, которая формирует на выходе вектор $\hat{x}(t)$ по данным о входах и выходах системы, будем называть *идентификатором состояния*. ○

З а м е ч а н и е. В американской литературе используются термины: «observer», «state estimator», «state reconstruction device». Несмотря на то что задачей идентификации называют обычно задачу оценки структуры и параметров математической модели объектов, автор считает, что термин «идентификатор состояния» вполне точно отражает суть дела и более удачен, чем иногда используемый буквальный перевод термина «observer» — наблюдатель. ○

Рассмотрим сначала различные способы конструирования стационарных идентификаторов состояния.

Простейший идентификатор. Начнем с построения идентификатора для системы с одним входом и одним выходом, заданной уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= c'x(t).\end{aligned}$$

Поскольку матрицы системы A , b , c известны, то в качестве идентификатора состояния можно принять модель системы, которая будет формировать оценку $\hat{x}(t)$. Схема такого простейшего идентификатора представлена на рис. 25.1.

Если начальное состояние системы совпадает с начальным состоянием идентификатора и если на вход идентификатора подается то же управляющее воздействие, что и на саму систему, то выход идентификатора $\hat{x}(t)$ будет равен состоянию $x(t)$ при всех t . В такой системе перешенным остается только вопрос о выборе начального состояния идентификатора. Эта задача решается, если использовать свойство идентифицируемости начального состоя-

ния системы на основании наблюдения за ее выходом. Ранее было доказано (теорема 3 § 24), что если система полностью идентифицируема, то ее начальное состояние можно оценить по известному входу и выходу системы. Следовательно, для такой системы можно использовать приведенный простейший идентификатор. У этого идентификатора имеется, однако, два существенных недостатка. Во-первых, начальное состояние необходимо вычислять

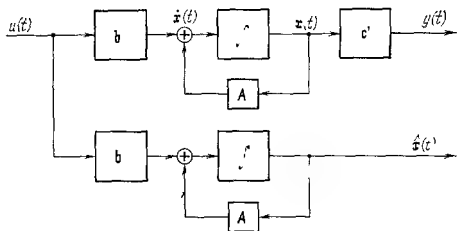


Рис. 25.1.

и фиксировать в каждый момент времени, когда используется идентификатор, а это очень неудобно. Второй, более серьезный недостаток состоит в том, что если матрица A имеет характеристические числа с положительной вещественной частью, то даже очень малое отклонение $\hat{x}(t_0)$ от $x(t_0)$ в некоторый момент времени t_0 , которое может быть вызвано помехой или неточной оценкой начального состояния, будет расти во времени, тем быстрее, чем больше величина положительной вещественной части характеристического числа A . По этим причинам простейший идентификатор без обратной связи, вообще говоря, неудовлетворителен.

Другой возможный способ получить оценку вектора состояния состоит в том, чтобы продифференцировать вход и выход $n - 1$ раз. Если линейная система идентифицируема, то из $y(t)$ и $u(t)$ и их производных можно вычислить вектор состояния. Однако «чистые дифференциаторы» не так просто построить. Более того, вычисляемое

состояние будет «сильно возмущаться» при наличии помех в том случае, если использовать дифференциаторы.

Асимптотический идентификатор для системы с одним выходом. В схеме на рис. 25.1 мы использовали не всю информацию о системе, которая имеется. В формировании оценки $\hat{x}(t)$ состояния не участвует выход системы $y(t)$, который доступен для измерения. Разумно предположить,

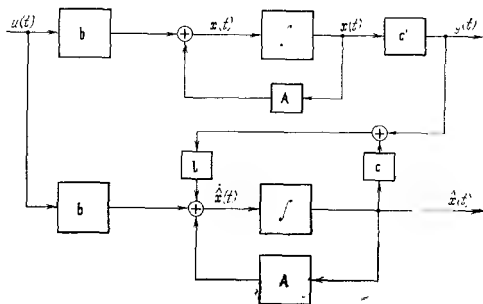


Рис. 25.2.

что использование выхода $y(t)$ позволит улучшить оценку состояния $\hat{x}(t)$. Рассмотрим идентификатор, приведенный на рис. 25.2. На вход этого идентификатора поступает как вход, так и выход исходной системы. Выход $y(t) = c'x(t)$ сравнивается с выходом $\hat{y}(t) = c'\hat{x}(t)$, и их разность является сигналом ошибки и подается на вход системы в качестве корректирующего воздействия. Именно, разность $[y - \hat{y}] = [y - c'\hat{x}]$ умножается на вектор l и подается на входы интеграторов идентификатора. Динамические свойства такого идентификатора существенно зависят от выбора вектора l . За счет выбора этого вектора необходимо обеспечить желаемый характер стремления разности $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В дальнейшем рассматриваются только асимптотические идентификаторы.

О п р е д е л е н и е 2. Линейная динамическая система, выходом которой является вектор $\hat{x}(t)$, называется

асимптотическим идентификатором состояния линейной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

если $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. $\odot$

Размерность идентификатора, приведенного на рис. 25.2, равна размерности системы n . Динамические уравнения этого n -мерного идентификатора имеют вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + l[y(t) - c'\hat{x}(t)] + bu(t),$$

или

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - lc']\hat{x}(t) + ly(t) + bu(t),$$

Если ввести новые переменные по формуле

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

(проверьте, что это невырожденная замена переменной; постройте соответствующую матрицу преобразования P), то уравнения идентификатора примут вид

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - lc']\tilde{x}(t);$$

$\tilde{x}(t)$ является вектором ошибки оценки состояния. Если бы можно было за счет выбора l произвольным образом выбирать характеристический многочлен матрицы $[A - lc']$, то это означало бы, что можно произвольно менять темп стремления оценки $\hat{x}(t)$ к состоянию системы $x(t)$. Например, если все собственные числа матрицы $[A - lc']$ имеют отрицательные действительные части меньше величины $-\sigma$, то все компоненты вектора ошибки $\hat{x}(t)$ приближаются к нулю со скоростью, не меньшей, чем $e^{-\sigma t}$. Следовательно, даже если есть большая ошибка между $\hat{x}(t_0)$ и $x(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , то вектор $\hat{x}(t)$ будет быстро (в соответствии с величиной $-\sigma$) приближаться к $x(t)$.

Таким образом, если бы можно было произвольно выбирать характеристический многочлен матрицы $[A - lc']$, то идентификатор на рис. 25.2 отвечал бы всем требованиям и был бы значительно более выгоден, чем простейший идентификатор рис. 25.1. Оказывается, что желаемая динамика идентификатора может быть выбрана в том случае, если система идентифицируема.

Теорема 1. Если линейная стационарная система с одним выходом идентифицируема, то можно построить асимптотический идентификатор с произвольным желаемым набором собственных чисел матрицы $[A - Ic']$: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (комплексные числа входят в этот набор вместе со своими сопряженными), причем $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.

Доказательство. Так как пара матриц $\{A, c'\}$ идентифицируема, то пара $\{A', c\}$ является согласно теореме 8 § 24 полностью управляемой, и значит, существует базис в пространстве X , в котором эта пара матриц имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ — характеристический многочлен матрицы A . В этом базисе матрицы $\{A, c'\}$ запишутся так:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad c' = [0 \dots 1]. \text{ (ИКП)}$$

Это представление пары $\{A, c'\}$ назовем *идентификационным каноническим представлением*.

Пусть теперь задан произвольный нормированный многочлен n -го порядка $\varphi_n(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$ с вещественными коэффициентами. Выберем в качестве компонент вектора l числа $l_{n-i+1} = \beta_i - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Непосредственная проверка показывает, что характеристический многочлен матрицы $[A - Ic']$ совпадает с заданным многочленом $\varphi_n(\lambda)$. $\odot$

З а м е ч а н и е 1. Линейная стационарная система с одним входом и одним выходом, описание которой задано с помощью передаточной функции вида

$$W(p) = \frac{\xi_1 p^{n-1} + \xi_2 p^{n-2} + \dots + \xi_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n},$$

является управляемой. Матрицы канонического представления этой системы имеют вид (УКП) (см. замечание 2 к теореме 3 § 22). Идентификационное каноническое представление этих матриц имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad c' = [0 \dots 1], \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Чтобы вычислить компоненты вектора b , необходимо построить матрицу P преобразования управляемой пары $\{A', c\}$ к идентифицируемой паре $\{A, c'\}$ вида (ИКП). Это построение можно выполнить, воспользовавшись результатом теоремы 1 § 21. Тогда компоненты вектора b определятся по формуле $b = P\bar{b}$, где $\bar{b}$ справа имеет вид $\bar{b}' = [0 \dots 1]$.

Структурная схема моделирования системы вида (ИКП) приведена на рис. 25.3.

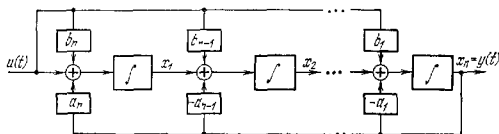


Рис. 25.3.

З а м е ч а н и е 2. Если собственные числа идентификатора выбраны так, что все их действительные части отрицательны, то не имеет значения, какое начальное состояние имеет идентификатор, поскольку его выход $\hat{x}(t)$ будет стремиться к действительному состоянию $x(t)$ асимптотически. Причем чем больше модули отрицательных вещественных чисел идентификатора, тем быстрее оценка $\hat{x}(t)$ приближается к действительному состоянию. Но чем быстрее стремление оценки $\hat{x}(t)$ к $x(t)$, тем чувствительнее идентификатор к шумам, действующим в канале измерения состояния системы. Поэтому вопрос о том, какие собственные числа идентификатора необходимо выбрать, чтобы он выполнял свою задачу наилучшим

образом, является далеко не тривиальным, и его решение требует рассмотрения конкретных условий работы системы (характер помех, точность задания коэффициентов и т. д.).

Рассмотрим примеры конструирования n -мерных асимптотических идентификаторов состояния для системы с одним входом.

Пример 1. Пусть даны матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 0].$$

Так как пара $\{A', c\}$ полностью управляема, то данная система является полностью идентифицируемой. Матрица преобразования пары матриц $\{A, c'\}$ к идентификационному каноническому представлению имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это преобразование состоит в замене x_1 и x_2 , x_2 на x_1 . Итак, идентификационное каноническое представление матриц системы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c' = [0 \ 1].$$

Если теперь задан произвольный многочлен $\varphi_n(\lambda) = \lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2$ и мы хотим, чтобы характеристический многочлен системы идентификатора совпадал с $\varphi_n(\lambda)$, то необходимо выбрать в соответствии с теоремой 1 компоненты вектора l по формулам:

$$l_1 = \beta_2 - \alpha_2 = \beta_2, \quad l_2 = \beta_1 - \alpha_1 = \beta_1,$$

так как $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Уравнения идентификатора имеют вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - lc'] \hat{x}(t) + ly(t) + bu(t).$$

Запишем их подробно:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 \\ 1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Структурная схема идентификатора представлена на рис. 25.4.

описываемой матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c' = [0 \dots 0 \ 1], \quad B = 0.$$

Действительно, вычисляя переходную матрицу этой системы, получим

$$\Phi(t, 0) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & t & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, функция

$$y(t) = c'x(t) = c'\Phi(t, 0)x(0) = c'e^{At}x(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_{n-k+1}(0)$$

является многочленом. Другими словами, любой многочлен может быть получен в качестве выходной величины $y(t)$ системы $\{A, c'\}$ за счет подходящего выбора начального состояния $x(0)$. Так как система (A, c') полностью идентифицируема, то согласно доказанной теореме можно построить систему оценки ее состояния, а динамику стремления оценки $\hat{x}(t)$ к состоянию $x(t)$ можно выбирать совершенно произвольно.

Система с многими выходами. Пусть линейная система

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t), \quad y(t) = C\hat{x}(t), \quad (\text{ЛС})$$

где A, B, C — матрицы $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ ($p > 1$) соответственно, имеет много выходов. По аналогии со случаем одного выхода рассмотрим n -мерную динамическую систему — идентификатор, на вход которого поданы входы системы (ЛС) и, кроме того, сигнал рассогласования между выходами этой системы и выходами системы (ЛС) с коэффициентами усиления, заданными с помощью матрицы L . Уравнения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L — матрица размеров $n \times p$. Вводя невырожденную замену переменной $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, мы получим уравнения для рассогласования между состоянием системы (ЛС) и выходом идентификатора (1) в виде

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - LC] \tilde{x}(t).$$

Поскольку пара матриц $\{A, C\}$ является идентифицируемой, то пара $\{A', C'\}$ управляема, и значит, найдется такая матрица L' , что характеристический многочлен матрицы $[A' - C'L']$ совпадает с любым заданным вещественным многочленом $\varphi_n(\lambda)$. Поскольку характеристические многочлены матриц $[A - LC]$ и $[A' - C'L']$ совпадают, то мы получим следующий результат.

Т е о р е м а 3. Для линейной идентифицируемой системы с многими входами (ЛС) существует n -мерный идентификатор состояния вида (1), причем характеристический многочлен матрицы $[A - LC]$, корни которого определяют характер стремления ошибки идентификатора к нулю, может быть произвольным вещественным многочленом $\varphi_n(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$. $\odot$

Из сказанного ясно, что для вычисления неизвестных параметров идентификатора (матрицы L) по заданным динамическим свойствам (многочлен $\varphi_n(\lambda)$) можно воспользоваться алгоритмом выбора матрицы обратной связи, приведенным в § 23.

Задачи. 1. Постройте идентификатор состояния для пары матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

который имел бы следующие собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

2. Постройте устойчивый 4-мерный идентификатор состояния, все характеристические числа которого равны 1, для системы с одним входом и одним выходом, передаточная функция которой имеет вид

$$W(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)(p+2)}.$$

3. Выпишите уравнения идентификатора для системы

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа идентификатора: $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = -3$.

4. Постройте идентификатор 6-го порядка для системы, приведенной в задаче 1 § 22, приняв в качестве его собственных чисел $\lambda_i = -1$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

§ 26. Идентификаторы Люенбергера

($n - 1$)-мерный асимптотический идентификатор для системы с одним выходом. Построенный в § 25 асимптотический идентификатор имеет ту же размерность, что и сама система. Согласно теореме 1 § 25, если система идентифицируема, то динамические свойства идентификатора можно выбирать произвольно. Если уравнения системы с одним выходом записаны в идентификационной канонической форме, то выход $y(t)$ совпадает с последней компонентой вектора состояний $x_n(t)$. Естественно спросить, а нельзя ли оценивать лишь переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{n-1}(t)$, приняв в качестве оценки переменной $x_n(t)$ результат ее измерения, т. е. положив $\hat{x}_n(t) = y(t) = x_n(t)$? Оказывается, такой идентификатор можно построить, причем характеристические числа этого идентификатора по-прежнему могут назначаться произвольно.

Рассмотрим уравнение n -мерного асимптотического идентификатора линейной системы

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + 1[y(t) - c'\hat{x}(t)] + bu(t).$$

Пусть в этом уравнении пара матриц $\{A, c'\}$ имеет идентификационное каноническое представление. Это означает, в частности, что $c'\hat{x}(t) = \hat{x}_n(t)$. Примем выход системы $y(t) = c'\hat{x}(t) = \hat{x}_n(t)$ в качестве оценки переменной $x_n(t)$, т. е. будем рассматривать результат измерения координаты $x_n(t)$ в качестве оценки $\hat{x}_n(t)$. Подставляя $y(t) = \hat{x}_n(t)$ в уравнение идентификатора, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений $(n - 1)$ -го порядка (последнее уравнение мы заменили тождеством $\hat{x}_n(t) = y(t)$):

$$\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}\hat{x}(t) + \bar{a}_n y(t) + \bar{b}u(t). \quad (1)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}'(t) = [\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_{n-1}(t)]$, через $\bar{A}$ обозначена подматрица размеров $(n-1) \times (n-1)$, расположенная в левом верхнем углу матрицы A . $\bar{a}_n$ — последний столбец матрицы A . Черточка сверху означает, что соответствующий n -вектор превращен в $(n-1)$ -мерный отбрасыванием последней компоненты. Например, $\bar{\mathbf{b}} = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]$.

Покажем, что характеристические числа $(n-1)$ -мерного идентификатора (1) совпадают с характеристическими числами матрицы $\bar{A}$. Заменим в уравнении идентификатора (1) переменные $x_i(t)$ на $\tilde{x}_i(t)$ по формуле $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Вектор ошибки имеет размерность $n-1$. В новых переменных уравнения идентификатора примут вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \bar{A}[\bar{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)] + \bar{a}_n y(t) + \bar{\mathbf{b}} u(t).$$

Но первые $n-1$ уравнений системы $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$ имеют вид

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{a}_n x_n(t) + \bar{\mathbf{b}} u(t).$$

Учитывая это и то, что $x_n(t) = y(t)$, получим следующее уравнение для $(n-1)$ -мерного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(t)$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \bar{A}\tilde{\mathbf{x}}(t).$$

Таким образом, характеристические числа подматрицы $\bar{A}$ размеров $(n-1) \times (n-1)$ определяют динамику стремления к нулю ошибки оценки состояния системы в $(n-1)$ -мерном идентификаторе. Следовательно, если найти такое невырожденное преобразование P , которое обеспечивает желаемый набор характеристических чисел у подматрицы размеров $(n-1) \times (n-1)$, расположенной в левом верхнем углу матрицы A , то тем самым можно получить уравнения $(n-1)$ -мерного асимптотического идентификатора, динамические свойства которого можно выбирать по своему усмотрению. Обратите внимание на то, что в приведенном ниже выводе преобразование P произвольно меняет характеристические числа матрицы $\bar{A}$, не меняя характеристических чисел матрицы A ! Проверим, что нужное нам

преобразование P имеет вид

$$P = \left[\begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} -\beta_{n-1} \\ -\beta_{n-2} \\ \dots \\ -\beta_1 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right], \quad P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \dots \\ \beta_1 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right], \quad (2)$$

где E — единичная матрицы размеров $(n-1) \times (n-1)$.

Если пара $\{A, c'\}$ имеет каноническое идентификационное представление, то непосредственное вычисление дает

$$PAP^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} (\alpha_1 - \beta_1)\beta_{n-1} - \alpha_n \\ (\alpha_1 - \beta_1)\beta_{n-2} - \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \\ \dots \\ (\alpha_1 - \beta_1)\beta_1 - \alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_1 + \beta_1 \end{matrix} \end{array} \right].$$

Если обозначать компоненты вектора b через $b_1, b_2, \dots, b_n$, то первые $n-1$ компонент преобразованного вектора b : $-Pb$ имеют вид

$$\bar{b} = P\bar{b} = \begin{bmatrix} b_n - \beta_{n-1} b_1 \\ b_{n-1} - \beta_{n-2} b_1 \\ \dots \\ b_2 - \beta_1 b_1 \end{bmatrix}.$$

Так как характеристический многочлен матрицы PAP^{-1} есть многочлен $\varphi_n(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_1\lambda^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$, который можно выбрать по своему усмотрению, то это и означает, что можно найти уравнения $(n-1)$ -мерного идентификатора с желаемым набором характеристических чисел. Прделанные вычисления позволяют сформулировать следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Для идентифицируемой n -мерной линейной системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ можно построить $(n-1)$ -мерный идентификатор состояния, характеристические числа которого можно выбирать по своему усмотрению. Если матрицы $\{A, c'\}$ представлены в виде (ИКП), то выход системы используется в этом идентификаторе в качестве оценки n -й компоненты вектора состояния. $\odot$

З а м е ч а н и е. Подобные $(n - 1)$ -мерные и вообще $(n - p)$ -мерные (где p — число линейно независимых выходов) асимптотические идентификаторы называют иногда идентификаторами Люенбергера, по имени американского ученого, впервые изучавшего их структуру. $\odot$

В приведенном нами способе построения асимптотических идентификаторов входы ие играют какой-либо роли. Поэтому все наши рассуждения применимы к идентифицируемым системам с несколькими входами и одним выходом.

Алгоритм построения $(n - 1)$ -мерного идентификатора. Пусть заданы матрицы управляемой системы с одним выходом и, вообще говоря, многими входами $\{A, b, c'\}$. Полученный нами алгоритм построения $(n - 1)$ -мерного идентификатора состояния состоит из следующих шагов:

1. Матрицы системы $\{A, b, c'\}$ записываем в таком базисе, чтобы пара $\{A, c'\}$ имела каноническое идентификационное представление (ИКП).

2. Выбираем динамические свойства идентификатора — многочлен

$$\varphi_n(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_1 \lambda^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}.$$

3. Преобразуем все матрицы системы с помощью матрицы P вида (2). Уравнения искомого идентификатора имеют при этом вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}\hat{x}(t) + \bar{a}_n y(t) + \bar{b}u(t),$$

где $\bar{A}$ — подматрица размеров $(n - 1) \times (n - 1)$, расположенная в левом верхнем углу матрицы A , $\bar{a}_n$ — последний столбец матрицы A .

П р и м е р 1. Рассмотрим полностью идентифицируемую систему второго порядка

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 0].$$

Построим для этой системы идентификатор первого порядка, динамика которого задана характеристическим многочленом $\varphi_n(\lambda) = \lambda + \beta$.

Преобразуем матрицы системы к идентификационному каноническому виду по формулам: $\bar{A} := P A P^{-1}$, $\bar{b} := P b$, $\bar{c}' := c' P^{-1}$. Матрица $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. В результате

расчетов получим

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c' = [0 \ 1].$$

Преобразуем теперь матрицы системы с помощью невырожденного преобразования (2)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -(1+\beta) & \beta(1-\beta) \\ 1 & (\beta-2) \end{bmatrix}, \quad Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c'P^{-1} = [0 \ 1].$$

Окончательно уравнения идентификатора примут вид

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = -(1+\beta)\hat{x}_1(t) + \beta(1-\beta)y(t) + u(t), \\ \hat{x}_2(t) = y(t).$$

Структурная схема этого идентификатора приведена на рис. 26.1. Сравните эту схему со схемой идентификатора второго порядка, приведенной на рис. 25.4.

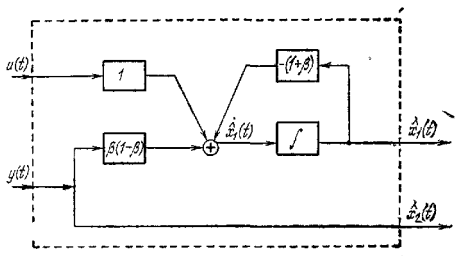


Рис. 26.1.

Идентификаторы Льюенбергера для системы с многими выходами. Изучим вопрос конструирования асимптотических идентификаторов для идентифицируемых систем со многими выходами. Поскольку задача идентификации состояния дуальна задачам управления, мы можем при конструировании идентификатора состояния для системы с многими выходами использовать соображения, приведенные при решении задачи выбора обратной связи по

Обозначим столбцы матрицы Q^{-1} следующим образом:

$$Q^{-1} = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1\mu_1}, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2\mu_2}, \dots, e_{1\mu_p}, \dots, e_{p\mu_p}].$$

Поскольку $QQ^{-1} = E$, то по определению выполняются следующие условия:

$$e_l A^q e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = l \text{ и } j = q + 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Теперь примем в качестве базиса пространства состояний набор столбцов

$$[e_{1\mu_1}, Ae_{1\mu_1}, \dots, A^{\mu_1-1} e_{1\mu_1}, e_{2\mu_2}, Ae_{2\mu_2}, \dots, A^{\mu_2-1} e_{2\mu_2}, \dots, e_{p\mu_p}, Ae_{p\mu_p}, \dots, A^{\mu_p-1} e_{p\mu_p}]. \quad (5)$$

Эти столбцы линейно независимы. Докажем сначала, что линейно независимы столбцы $[e_{i\mu_i}, Ae_{i\mu_i}, \dots, A^{\mu_i-1} e_{i\mu_i}]$. Предположим, что существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов. Например,

$$\alpha_1 e_{i\mu_i} + \alpha_2 Ae_{i\mu_i} + \dots + \alpha_{\mu_i} A^{\mu_i-1} e_{i\mu_i} = 0.$$

Умножив это равенство слева на строку c_i , получим

$$(\alpha_1 c_i + \alpha_2 c_i A + \dots + \alpha_{\mu_i} c_i A^{\mu_i-1}) e_{i\mu_i} = 0,$$

но $e_{i\mu_i} \neq 0$. Значит, линейно зависимы строки набора (3). Полученное противоречие доказывает, что столбцы

$$e_{i\mu_i}, Ae_{i\mu_i}, \dots, A^{\mu_i-1} e_{i\mu_i}$$

линейно независимы при любом $i = 1, 2, \dots, p$. Вспомогая, что столбцы $e_{1\mu_1}, e_{2\mu_2}, \dots, e_{p\mu_p}$ линейно независимы по построению, легко видеть, что все столбцы набора (5) линейно независимы. Образует из этих столбцов матрицу

$$P^{-1} = [e_{1\mu_1}, Ae_{1\mu_1}, \dots, A^{\mu_1-1} e_{1\mu_1}, e_{2\mu_2}, Ae_{2\mu_2}, \dots, A^{\mu_2-1} e_{2\mu_2}, \dots, e_{p\mu_p}, Ae_{p\mu_p}, \dots, A^{\mu_p-1} e_{p\mu_p}]$$

и выберем столбцы этой матрицы в качестве базиса пространства состояний. Приведение матрицы C к этому базису в соответствии с формулой $C := CP^{-1}$ приводит

к следующему виду уравнения наблюдения:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

При вычислении C мы воспользовались формулой (4).

В новом базисе уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$ примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dots \\ \dot{x}_{1\mu_1} \\ \dots \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dots \\ \dot{x}_{2\mu_2} \\ \dots \\ \dot{x}_{p1} \\ \dot{x}_{p2} \\ \dots \\ \dot{x}_{p\mu_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * & & & * & & & * & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & * & & & * & & & * & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & & & * & & & * & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * & & & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & * & & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & 0 & 0 & \dots & 1 & * & & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & & & & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & & & & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{bmatrix} \mathbf{x} + B\mathbf{u},$$

где знаком * обозначены, возможно, ненулевые элементы матрицы. Приведенную систему уравнений можно, очевидно, рассматривать как совокупность p систем уравнений, каждая из которых имеет много входов и единственный выход. Структурная схема полученного канонического представления приведена на рис. 26.2. Каждая из p систем имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dots \\ \dot{x}_{i\mu_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{i\mu_i} \end{bmatrix} + D_i \mathbf{y} + B_i \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\mathbf{y}_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x}_i.$$

Здесь D_i и B_i — матрицы размеров $\mu_i \times p$ и $\mu_i \times m$ соответственно.

Используя полученное каноническое представление, можно непосредственно применить к системе с многими выходами результаты, полученные при построении идентификаторов для системы с одним выходом. Для каждой подсистемы (б) можно построить асимптотический идентификатор размерности $\mu_i - 1$. Следовательно, размерность

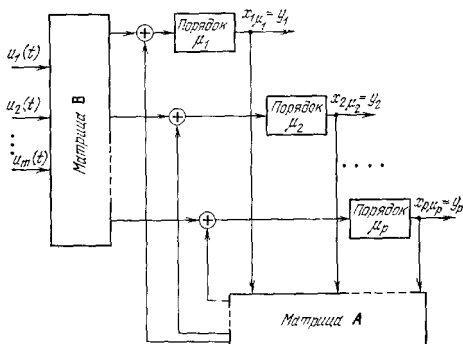


Рис. 26.2.

идентификатора системы равна сумме размерностей p идентификаторов для систем (б):

$$\sum_{i=1}^p (\mu_i - 1) = n - p.$$

Эти идентификаторы дают на своих выходах $n - p$ оценок переменных состояния. Выходной вектор системы доставляет еще p оценок. Характеристический многочлен каждого из p идентификаторов согласно доказанному ранее результату (теорема 1) можно выбирать по своему усмотрению. Единственное ограничение, связанное с реализуемостью системы, состоит в том, что этот многочлен должен иметь действительные коэффициенты. Поэтому, если ком-

плексное число λ_i является корнем этого многочлена, то сопряженное число $\bar{\lambda}_i$ тоже должно быть корнем этого многочлена. Полученные результаты суммируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. Если n -мерная линейная стационарная система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (1С)$$

полностью идентифицируема, то можно построить $(n - p)$ -мерный асимптотический идентификатор состояния, характеристический многочлен которого совпадает с любым желаемым устойчивым многочленом с действительными коэффициентами. Здесь p равно рангу матрицы C . $\odot$

Алгоритм построения асимптотического идентификатора состояния для системы с многими входами состоит из двух этапов:

1. Выбираем базис в пространстве X , в котором система разбивается на p подсистем вида (6), используя способ 2 § 22.

2. Используем алгоритм построения идентификатора для системы с одним выходом и многими входами.

З а м е ч а н и е. Хотя приведенные результаты и имеют значительный теоретический интерес, они не дают критериев выбора полюсов идентификатора. Ясно, что характеристические числа идентификатора должны выбираться таким образом, чтобы идентификатор был устойчивым и чтобы вещественные части его собственных значений были «более отрицательными», чем вещественные части собственных значений самой системы. Это нужно требовать потому, что, как правило, не известно начальное состояние идентификатора. Однако увеличение модуля вещественных частей идентификатора превращает его в дифференциатор со всеми возникающими при этом проблемами. Выбор размещения полюсов идентификатора — сложная задача, в особенности для многомерных систем.

Матричное уравнение $TA - DT = S$ в теории идентификаторов. Рассмотрим другой подход к задаче конструирования идентификатора. Начнем с задачи идентификации состояния однородной стационарной системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$, уравнение наблюдения которой имеет вид $y(t) =$

$= Cx(t)$, где C — матрица $p \times n$. Пусть выходы этой системы подаются на входы q -мерной системы (идентификатора) $\dot{z} = Dz + QCx$, где Q — матрица $q \times p$, D — матрица $q \times q$. Обозначим $QC = S$, тогда

$$\dot{z} = Dz + Sx. \quad (7)$$

Предположим теперь, что существует $(q \times n)$ -матрица T такая, что выполняется равенство $TA - DT = S$. Тогда непосредственным вычислением легко установить, что решение уравнения (7) представимо в виде

$$z(t) = Tx(t) + e^{Dt} [z(0) - Tx(0)] \quad (8)$$

и, значит, если D — устойчивая матрица, то $z(t) \rightarrow Tx(t)$ при $t \rightarrow \infty$ при любых $z(0)$ и $x(0)$. Предположим, что система имеет p линейно независимых выходов, размерность идентификатора равна $n - p$, причем матрица D устойчива, а T является решением уравнения

$$TA - DT = S \quad (9)$$

и имеет ранг $(n - p)$. Тогда p компонент вектора выхода и $n - p$ переменных состояния идентификатора дают ровно n линейно независимых линейных комбинаций переменных состояния системы. Решая эти n линейно независимых уравнений относительно n неизвестных, получим оценки всех компонент вектора состояния. Динамика стремления ошибки этих оценок к нулю определяется матрицей D . Задача конструирования идентификатора при таком подходе сводится к решению матричного уравнения $TA - DT = S$ относительно $(q \times n)$ -матрицы T . В этом уравнении матрица A задана, матрицу D выбирают по желаемым динамическим свойствам идентификатора, матрица S задана частично, так как $S = QC$, где C задана, а Q предстоит выбрать. Итак, алгебраическая задача состоит в том, чтобы выбрать D и Q так, чтобы решение T имело заданный ранг $n - p$.

Если система подвержена внешним воздействиям $B \neq 0$, то решение уравнений идентификатора будет по-прежнему иметь вид (8), если эти уравнения записать в форме

$$\dot{z}(t) = Dz(t) + Sx(t) + TBu(t) \quad (10)$$

и если T удовлетворяет уравнению (9). Советуем читателю проделать соответствующие несложные вычисления и доказать следующий результат.

Т е о р е м а 3. *Выходы линейной (q -мерной) системы (10) асимптотически приближаются к линейным комбинациям вектора состояний $Tx(t)$ линейной системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ при любых начальных условиях $z(0)$, $x(0)$ в том и только в том случае, когда T является решением матричного алгебраического уравнения (9), а матрица D устойчива. $\odot$*

Поскольку теоремы о существовании идентификаторов с произвольными динамическими свойствами нами доказаны, мы рассмотрим задачи конструирования идентификаторов с помощью данного подхода, не останавливаясь на математических подробностях. Пусть матрицы $\{A, c'\}$ системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $y(t) = c'x(t)$ имеют идентификационное каноническое представление. Пусть уравнение (7) идентификатора для этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \beta_n & -\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

В этом случае легко проверить, что решением уравнения $TA - DT = S$ является единичная матрица $E = T$, поэтому переменные идентификатора z_i служат оценкой для соответствующих переменных x_i . Поскольку матрица уравнения наблюдения $c' = [0 \ 0 \ \dots \ 1]$ нам задана, то из уравнения $S = Qc'$ имеем

$$Q = \begin{bmatrix} \beta_n - \alpha_n \\ \dots \\ \beta_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку характеристический полином матрицы D равен $\varphi_D(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$, то динамические свойства идентификатора можно выбрать по своему усмотрению.

Рассмотрим теперь задачу конструирования идентификатора $(n-1)$ -го порядка для системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $y(t) = c'x(t)$, где $\{A, c'\}$ представлены в виде (ИКП).

Если уравнения идентификатора имеют вид

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & -\beta_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_1 \end{bmatrix} z(t) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\beta_{n-1}(\alpha_1 - \beta_1) - \alpha'_n \\ 0 & \dots & -(\alpha_1 - \beta_1)\beta_{n-2} - \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\beta_1(\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

то решением уравнения $TA - DT = S$ будет матрица

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\beta_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_1 \end{bmatrix}$$

размеров $(n-1) \times n$. В этом случае оценки переменных $\hat{x}_i$ получаются из переменных z_i по следующим формулам:

$$\hat{x}_i = z_{i-1} + \beta_{i-1}x_n. \quad (11)$$

Поскольку коэффициенты β_i можно выбирать по своему усмотрению, то динамические свойства идентификатора по-прежнему могут назначаться произвольно. В общем случае, условие идентифицируемости системы гарантирует существование матриц D (с произвольно заданным характеристическим многочленом) и T, Q , удовлетворяющих уравнению $TA - DT = QC$ и таких, что выходы идентификатора $z(t)$ дают оценки всех компонентов вектора состояний. Рассмотренный подход позволяет, таким образом, выяснить алгебраическую сторону проблемы конструирования идентификатора.

Пример 2. Пусть матрицы системы имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 0].$$

Выберем собственное значение идентификатора $\lambda = -3$. Тогда уравнение идентификатора имеет вид

$$\dot{z}(t) = -3z(t) + [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Пусть $z(t) = T x(t)$, где T является решением уравнения

$$T \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 3T = [1 \ 0].$$

Решение этого уравнения имеет вид $T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Вычислим $Tb = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$. Окончательно уравнение идентификатора получим в виде

$$\dot{z}(t) = -3z(t) + x_1(t) - \frac{1}{2}u(t)$$

и

$$z(t) = x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t).$$

Структурная схема данной системы и построенного идентификатора приведена на рис. 26.3.

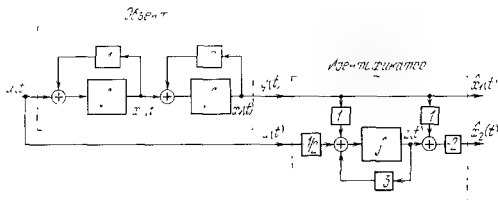


Рис. 26.3.

Еще один способ построения $(n - p)$ -мерного идентификатора. Пусть в уравнениях (ЛС) в условиях теоремы 2 матрица C имеет ранг p . Выберем в качестве новых переменных состояния p линейных комбинаций компонент вектора $x(t)$, задаваемых уравнением наблюдения системы, и еще $(n - p)$ линейно независимых комбинаций компонент $x(t)$, заданных равенством $z(t) = Lx(t)$, где

L — матрица $(n - p) \times n$, строки которой левейпо независимы. Проведенную замену переменных можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} x(t) = P x(t). \quad (12)$$

В соответствии с выбором L это — невырожденная замена переменной, и матрица P имеет обратную. Поэтому

$$x(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Подставляя новые переменные в уравнения системы, получим

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = P A P^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + P B u(t),$$

или, разбивая матрицы $P A P^{-1}$ и $P B$ на блоки, имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{zz} & A_{zy} \\ A_{yz} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_z \\ B_y \end{bmatrix} u(t). \quad (*)$$

Из этого представления следует, что уравнение для переменных $z(t)$ имеет вид

$$\dot{z}(t) = A_{zz}z(t) + A_{zy}y(t) + B_z u(t).$$

Возьмем в качестве уравнения оценки вектора $z(t)$ уравнение

$$\dot{\hat{z}}(t) = A_{zz}\hat{z}(t) + A_{zy}y(t) + B_z u(t), \quad \hat{z}(0) = 0. \quad (13)$$

Тогда ошибка оценки $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A_{zz}\tilde{z}(t), \quad \tilde{z}(0) = z(0) - \hat{z}(0).$$

Если матрица A_{zz} устойчива, то $\tilde{z}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, оценка вектора состояния системы (ЛС) определена равенством

$$\hat{x}(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

и, если матрица L в (12) выбрана так, что подматрица $A_{zz}(n-p) \times (n-p)$ устойчива, то

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Структурная схема идентификатора приведена на рис. 26.4.

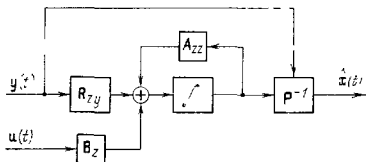


Рис. 26.4.

Задачи. 1. Даны матрицы системы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг матрицы $\{C', A'C'\}$ равен 3, то система идентифицируема. Ранг матрицы C равен 2. Значит, идентификатор будет иметь размерность 1. Выпишите уравнения этого идентификатора.

2. Докажите, что уравнение $TA - BT = C$, где A и B — квадратные матрицы $n \times n$ и $m \times m$, имеет единственное решение при любой матрице C тогда и только тогда, когда A и B не имеют общих характеристических чисел.

3. Получите уравнения асимптотического идентификатора системы с многими выходами, используя каноническое представление, получаемое по способу 1 § 22.

4. Постройте идентификатор с собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ для системы, заданной матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c' = [2 \ 0 \ 1 \ 0], \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Укажите основной принципиальный недостаток идентификатора Люенбергера в сравнении с n -мерным идентификатором (фильтром Калмана).

6. Используя замену переменной (12), постройте идентификатор состояния гармонического осциллятора $\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$, $y(t) = x(t)$, приняв собственные значения идентификатора равными -5 .

7. Оцените все переменные состояния объекта

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= x + u, \\ \ddot{z}(t) &= xz - u,\end{aligned}$$

если измеряется переменная $z(t)$, а собственные числа идентификатора равны: $-1 + i$, $-1 - i$, -1 . Решите эту задачу тремя способами, приведенными в тексте. Какой способ обеспечивает минимальный объем вычислений?

8. Для объекта

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad y(t) = x(t) + \Delta,$$

где Δ — аддитивная постоянная помеха в канале измерения, постройте динамическую систему, три выхода которой асимптотически стремятся бы к величинам $x(t)$, $\dot{x}(t)$, Δ при $t \rightarrow \infty$.

У к а з а и е. Введите третью переменную состояния с уравнением $\dot{\Delta}(t) = 0$ и постройте идентификатор для полученной системы 3-го порядка.

9. Скоиструируйте идентификатор 2-го порядка оценки состояния системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа идентификатора: $\lambda_1 = -2 - i$, $\lambda_2 = -2 - i$.

Г Л А В А VI

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Модальное управление обычно определяют как управление, которое изменяет моды (собственные значения матрицы объекта) с целью достижения целей управления.

По существу задачи модального управления встречались уже в главах IV и V. Так, в § 23 приведен алгоритм выбора такой обратной связи по состоянию, которая обеспечивает заданное размещение собственных значений (мод) объекта на комплексной плоскости. В §§ 25, 26 из чисто «модальных соображений» выбиралась динамика идентификатора.

В данной главе эти результаты положены в основу конструкций устойчивых регуляторов состояния. Основное внимание будет уделено конструированию обратных связей, обеспечивающих заданное размещение собственных чисел (мод) замкнутой системы на комплексной плоскости. При этом предполагается, что конструктору известно, какой набор собственных чисел желателен. Единственным обязательным требованием будет требование устойчивости замкнутой системы. Безусловно, устойчивость системы является необходимым, но далеко не достаточным условием ее практической пригодности. Регулятор обычно должен обеспечить выполнение разнообразных требований, предъявляемых к переходному процессу. Эти требования могут сложным образом зависеть как от собственных чисел замкнутой системы, так и от нулей ее передаточной функции. Таким образом, читателю необходимо иметь в виду, что разбираемые ниже методы расчета модальных регуляторов не исчерпывают всей задачи инженерного конструирования регуляторов, а обеспечивают формализацию и алгоритмизацию важнейшего этапа решения этой задачи — этапа выбора динамической обратной связи по заданным желаемым собственным числам замкнутой системы.

§ 27. Конструкция регуляторов

В главе IV было показано, что управляемой стационарной системе с помощью обратной связи можно придать произвольные динамические свойства. Именно, корни характеристического уравнения такой замкнутой системы можно выбирать произвольно. Эти неограниченные возможности стационарной обратной связи нельзя, вообще говоря, использовать из-за того, что не все компоненты вектора состояний обычно доступны для измерения.

В главе V выяснено, что для идентифицируемой системы можно построить динамическую систему (идентификатор), выходные переменные которой асимптотически приближаются к переменным состояния исходной системы.

Теперь предстоит объединить эти результаты в конструкции одного регулятора.

Этот регулятор состоит из динамической системы, вырабатывающей на своем выходе оценку вектора состояний $\hat{x}(t)$ по результатам измерения выхода системы $y(t)$ и

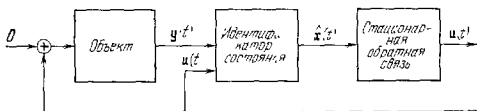


Рис. 27.1.

входа $u(t)$, и из стационарной обратной связи вида $u(t) = -K\hat{x}(t)$ (рис. 27.1)

Применение n -мерных идентификаторов. Рассмотрим n -мерную управляемую и идентифицируемую линейную систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{ЛС})$$

Пусть, матрица обратной связи K выбрана так, что характеристический многочлен матрицы $[A - BK]$ совпадает с выбранным нами желаемым многочленом $\varphi_y(\lambda)$.

Предположим теперь, что построен асимптотический идентификатор состояния, уравнение которого имеет вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - LC]\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t); \quad (И)$$

обозначим характеристический многочлен идентификатора $\varphi_{\text{и}}(\lambda) = \varphi_{[A - LC]}$. Так как вектор $x(t)$ недоступен для измерения, то попробуем заменить в цепи обратной связи вектор $x(t)$ на его оценку $\hat{x}(t)$. Напомним, что поскольку многочлен $\varphi_{\text{и}}(\lambda)$ можно выбрать по своему усмотрению, то всегда можно получить произвольную динамику стремления оценки $\hat{x}(t)$ к $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$. При такой замене основной интерес представляет два вопроса: (1) матрица K выбрана в предположении, что известно состояние $x(t)$, а потом вектор состояния заменен его оценкой $\hat{x}(t)$. Получится ли прежний результат? Другими словами, будет ли система с обратной связью по-прежнему иметь желаемый характеристический многочлен $\varphi_{\text{у}}(\lambda)$? (2) Какой эффект вносит в систему идентификатор? Какое отношение к характеристическому многочлену замкнутой системы $2n$ -го порядка будет иметь характеристический многочлен идентификатора? Войдут ли собственные числа идентификатора в замкнутую систему без изменений? Оказывается, что выбранные характеристические числа системы с обратной связью по состоянию и характеристические числа идентификатора войдут в замкнутую систему без изменений. Имению, справедлива следующая

Т е о р е м а 1. Пусть дана управляемая и идентифицируемая система $\{A, B, C\}$. Пусть матрица K выбрана так, что характеристический многочлен матрицы $[A - BK]$ совпадает с заданным многочленом $\varphi_{\text{у}}(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, и пусть выбрана матрица L такая, что характеристический многочлен матрицы $[A - LC]$ совпадает с $\varphi_{\text{и}}(\lambda) = \lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$; тогда характеристический многочлен замкнутой системы $2n$ -го порядка

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t),$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - LC]\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + LCx(t),$$

который мы обозначим через $\varphi_0(\lambda)$, совпадает с произведением выбранных многочленов $\varphi_0(\lambda) = \varphi_{\text{у}}(\lambda) \cdot \varphi_{\text{и}}(\lambda)$.

Доказательство. Вычислим характеристический многочлен получившейся системы $2n$ -го порядка

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Сделаем невырожденную замену переменной $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Матрица этого преобразования имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} E & 0 \\ E & -E \end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица размеров $n \times n$. В новых координатах матрица замкнутой системы будет клеточно-диагональной матрицей

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & ? \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой клеточно-диагональной матрицы совпадает с произведением характеристических многочленов клеток, стоящих на диагонали. Имея-но, $\Phi_0(\lambda) = \Phi_{\mathbf{y}}(\lambda) \cdot \Phi_{\mathbf{x}}(\lambda)$. $\odot$

Доказанная теорема очень важна для приложений. Она утверждает, что поскольку речь идет о характеристических числах замкнутой системы, то в некотором смысле нет разницы между использованием в цепи обратной связи вектора $\mathbf{x}(t)$ и вектора $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Следовательно, и это особенно важно и удобно, конструирование цепи обратной связи и конструирование идентификатора можно осуществлять независимо. Характеристический многочлен замкнутой системы будет равен произведению характеристических многочленов системы с обратной связью «п» состоянию» и идентификатора. При конструировании обратной связи мы имеем дело с двумя независимыми задачами, каждая из которых n -мерна.

Для случая, когда управляемая и идентифицируемая система имеет единственный вход и один выход, формулы построения n -мерной обратной связи, обеспечивающей заданный набор $2n$ собственных значений матрицы замкнутой системы, можно представить в замкнутой компактной форме.

Алгоритм вычисления коэффициентов регулятора для системы с одним входом. Пусть даны матрицы управляемой и идентифицируемой системы с одним входом и с одним выходом $\{A, b, c'\}$ и пусть характеристический многочлен матрицы A равен $\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$. Выберем в качестве $\varphi_y(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, а характеристический многочлен идентификатора представим в виде $\varphi_u(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n$. Введем обозначения

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнения регулятора, согласно приведенным выше результатам имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= [A - lc'] \hat{x}(t) + ly(t) + bu(t), \\ u(t) &= -k' \hat{x}(t). \end{aligned}$$

Матрицы регулятора можно вычислить по формулам:

$$[A - lc'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\beta_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\beta_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} \beta_n - \alpha_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \beta_1 - \alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$b = P \hat{b},$$

$$k' = [\gamma_n - \alpha_n, \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}, \dots, \gamma_1 - \alpha_1] \cdot P^{-1}.$$

Чтобы получить матрицы P и P^{-1} , необходимо последовательно выполнить следующие вычисления:

$$\begin{aligned} U &= [b, Ab, \dots, A^{n-1}b], \quad \hat{U} = [\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{b}], \\ \hat{U} &= \hat{U}^{-1}, \quad \hat{c}' = c'U\hat{U}^{-1}, \quad P = \{[\hat{c}', \hat{A}'\hat{c}', \dots, (\hat{A}')^{n-1}\hat{c}']\hat{U}\}^{-1}, P^{-1}. \end{aligned}$$

Объем всех вычислений, необходимых для построения матриц регулятора, в точности равен двум обращениям и пяти умножениям n -мерных матриц.

Мы не приводим здесь подробного вывода этих формул, так как по существу они были получены ранее. Приведенный алгоритм объединяет задачу выбора обратной

связи «по состоянию» и задачу выбора коэффициентов идентификатора. При последовательном применении этих алгоритмов нужно лишь следить за тем, чтобы матрицы системы были бы записаны в одном и том же базисе пространства состояний. Существование матрицы перехода к каноническому представлению и к идентификационному каноническому представлению обеспечивается свойствами управляемости и идентифицируемости системы. Ясно, что полученные уравнения регулятора определены с точностью до некоторого невырожденного преобразования P в пространстве состояний системы.

Для случая системы второго порядка с одним входом и одним выходом можно позволить себе роскошь в явном виде выписать формулы обратной связи по заданным коэффициентам многочленов φ_y и φ_n . Пусть элементы матриц системы обозначены:

$$A = [a_{ij}], \quad b' = [b_1, b_2], \quad c' = [c_1, c_2], \quad \varphi_A = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2.$$

$$\text{Выберем: } \varphi_y = \lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2, \quad \varphi_n = \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_2.$$

Матрицы регулятора вычисляем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} [A - bc'] &= \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 \\ 1 & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad I - \begin{bmatrix} \beta_2 - \alpha_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}, \\ \hat{c}_1 &= c_1 (\alpha_1 b_1 + a_{11} b_1 + a_{12} b_2) + \\ &\quad + c_2 (\alpha_2 b_2 + a_{21} b_1 + a_{22} b_2), \\ \hat{c}_2 &= b_1 c_1 + b_2 c_2, \\ k' &= \left[\frac{\hat{c}_2 (\gamma_2 + \alpha_2) - \hat{c}_1 (\gamma_1 - \alpha_1)}{\hat{c}_2 (\alpha_1 \hat{c}_1 - \alpha_2 \hat{c}_2) - \hat{c}_1^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(\gamma_1 - \alpha_1)(\alpha_1 \hat{c}_1 - \alpha_2 \hat{c}_2) - \hat{c}_1 (\gamma_2 - \alpha_2)}{\hat{c}_2 (\alpha_1 \hat{c}_1 - \alpha_2 \hat{c}_2) - \hat{c}_1^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Структурная схема регулятора приведена на рис. 27.2.

З а м е ч а н и е. Вычисление не обязательно проводить по приведенным общим формулам. Порядок расчетов может быть и другим. Поскольку характеристический многочлен замкнутой системы, охваченной связью по состоянию, и характеристический многочлен идентификатора можно вычислять независимо друг от друга, то можно построить несколько равноценных алгоритмов вычисления n -мерной обратной связи, обеспечивающей заданный набор $2n$ характеристических чисел замкнутой

системы. Например, сначала можно вычислить вектор обратной связи k' . Для этого удобно перейти к каноническому управляющему представлению. Тогда матрицы A , b , k' выписываются сразу, а для получения матрицы c' необходимо вычислить матрицу преобразования P . Чтобы вычислить вектор l , удобно перейти сразу к базису, в котором пара $\{A, c'\}$ имеет каноническое идентификационное представление. Тогда матрицы $\{A, c', l\}$ выписываются сразу, а для вычисления матриц k' , b нужно строить

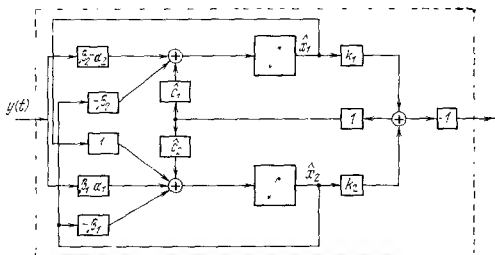


Рис. 27.2.

соответствующую матрицу перехода. Последовательность вычислений можно менять. Необходимо лишь помнить основное правило: *все матрицы системы должны быть записаны в одном и том же базисе пространства состояний*. Ясно, что коэффициенты регуляторов при различных способах расчетов могут быть разными, хотя замкнутая система и будет иметь один и тот же набор собственных чисел. Получаемые регуляторы будут иметь одну и ту же передаточную функцию и одинаковые характеристические многочлены. Структурные схемы этих регуляторов можно сделать идентичными с помощью соответствующего невырожденного линейного преобразования в пространстве состояний или с помощью разрешенных преобразований структурных схем.

Фильтр Калмана. Задача регулирования в детерминированной постановке решена, считая, что все параметры

системы точно известны и что на систему не действуют помехи в процессе ее работы. Между тем конструирование регулятора невозможно без учета реальных условий применения системы, без учета характера помех и возмущений, действующих на систему. Удивительно, что структура линейного регулятора, наилучшим образом работающего при наличии помех, в точности совпадает со структурой регулятора, использующего n мерный идентификатор состояния (теорема 1).

Приведем без доказательства соответствующие результаты.

Если в системе присутствуют помехи на входе и выходе системы, задача детерминированного управления заменяется стохастической задачей. Вместо рассматриваемой нами ранее линейной системы исследуется следующая система (рассмотрим стационарный случай):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b[u(t) + v(t)], \\ y(t) &= c'x(t) + w(t),\end{aligned}$$

где $v(t)$ и $w(t)$ — соответственно аддитивная скалярная входная помеха и шум измерения вектора выхода. Помехи v и w предполагаются стационарными независимыми белыми гауссовыми шумами с нулевым математическим ожиданием, т. е.

$E(v) = 0$; $E(w) = 0$, $E\{v(t)w'(t + \tau)\} = 0$,
 $E\{v'(t)v(t + \tau)\} = q\delta(\tau)$, $E\{w(t)w'(t + \tau)\} = P\delta(\tau)$,
 где δ дельта-функция Дирака, P — симметрическая неотрицательно определенная матрица и $q > 0$, $E(\cdot)$ — математическое ожидание.

Если предположить, что матрица P положительно определена, то оценка $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ может быть построена в виде (подробности имеются в книге [24])

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - c'\hat{x}(t)] + bu(t), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где

$$L = K_0 c' P^{-1},$$

а K_0 — единственное положительно определенное решение алгебраического матричного уравнения (уравнение Рикати)

$$AK(t) + K(t)A' - K(t)c'P^{-1}cK(t) + qbb' = 0.$$

Более того, этот идентификатор асимптотически устойчив, т. е. собственные значения матрицы $[A - Lc]$ имеют отрицательные вещественные части. Структура этого идентификатора (фильтра Калмана) в точности совпадает со структурой n -мерного асимптотического идентификатора состояния (§ 25).

Выбор коэффициентов для асимптотического идентификатора в детерминированном случае был ограничен лишь условием асимптотической устойчивости матрицы $[A - Lc]$, а в остальном произволен. Уравнения фильтра Калмана однозначно определяют все коэффициенты идентификатора по данным о характеристиках помех в соответствии с выбранным критерием (минимум среднеквадратичной ошибки оценки состояния).

Использование идентификатора Люеибергера. Результат, аналогичный теореме 1, справедлив и для случая использования $(n - p)$ -мерного идентификатора состояния. Сначала докажем соответствующий результат для системы с одним выходом, когда идентификатор имеет размерность $n - 1$.

Т е о р е м а 2. Пусть идентифицируемая и управляемая система с одним выходом y , вообще говоря, с многими входами задана матрицами $\{A, B, c'\}$. Пусть, далее, матрица K выбрана так, что характеристический многочлен матрицы $[A - BK]$ совпадает с желаемым $\varphi_{\gamma}(\lambda)$, и пусть для этой системы построен $(n - 1)$ -мерный идентификатор состояния с характеристическим многочленом $\varphi_n(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta_1\lambda^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}$. Тогда характеристический многочлен замкнутой системы $(2n - 1)$ -го порядка равен произведению многочленов $\varphi_0(\lambda) = \varphi_{\gamma}(\lambda)\varphi_n(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\hat{x}(t)$ выход идентификатора. Этот вектор имеет размерность $n - 1$. Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - BK \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}(t) = \bar{A}\hat{x}(t) - \bar{a}_n x_n(t) + Bu(t)$$

(см. теорему 2 § 26). Если теперь в этих уравнениях сделать невырожденную замену переменных $\bar{x}(t) = \hat{x}(t) - \bar{x}(t)$ точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 2 § 26, то уравнения системы вместе

с целью обратной связи примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= [A - BK] \mathbf{x}(t) + [?] \tilde{\mathbf{x}}(t), \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}}(t).\end{aligned}$$

Матрица этой замкнутой системы $(2n - 1)$ -го порядка имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} A - BK & ? \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array} \right].$$

Это — клеточно-диагональная матрица, и следовательно, ее характеристический многочлен равен произведению характеристических многочленов ее диагональных клеток, т. е.

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi_y(\lambda) \cdot \varphi_{\tilde{z}}(\lambda). \odot$$

Если система имеет много выходов и является идентифицируемой, то, как показано при доказательстве теоремы 3 § 26, ее можно представить как прямую сумму подсистем, каждая из которых имеет один выход и много входов. Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 3. Пусть линейная система n -го порядка является управляемой и идентифицируемой и имеет p независимых выходов. Тогда можно построить цепь обратной связи $(n - p)$ -го порядка, такую, что характеристический многочлен замкнутой системы $(2n - p)$ -го порядка совпадает с произвольным вещественным многочленом $(2n - p)$ -го порядка. $\odot$

Естественно, нас интересуют только асимптотически устойчивые многочлены, все характеристические числа которых имеют строго отрицательные вещественные части.

Пользуясь описанием идентификатора Люенбергера, приведенным в конце § 26 (рис. 26.4), можно легко доказать теорему о возможности раздельного выбора характеристических чисел идентификатора и системы, охваченной обратной связью по состоянию. Действительно, если выбрать в качестве переменных состояния системы $(2n - p)$ -го порядка переменных $\{\hat{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{z}}(t)\}$, то, пользуясь

результатом § 26, имеем

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}(t) &= A_{zz}\tilde{z}(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) &= [A - KB]\hat{x}(t) - P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ A_{yz} \end{bmatrix} \tilde{z}(t).\end{aligned}\quad (2)$$

Отсюда сразу следует, что собственные числа замкнутой системы есть собственные числа системы со стационарной обратной связью по состоянию (матрица $[A - BK]$) плюс собственные числа идентификатора (матрица A_{zz}). Это следует из представления матрицы системы (2) в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{zz} & 0 \\ ? & [A - BK] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}.$$

Эта теорема завершает исследование задачи конструирования устойчивого регулятора нулевого состояния. Рассмотрим подробно ряд примеров конструирования асимптотически устойчивых регуляторов.

Пример. Два интегратора, охваченные положительной обратной связью, имеют следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 0]. \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Согласно теореме 1 для этой системы можно выбрать цепь обратной связи, содержащую два динамических элемента, и такую, что замкнутая система 4-го порядка будет иметь произвольно заданный характеристический многочлен. Это можно сделать потому, что система является управляемой и идентифицируемой. Коэффициенты цепи обратной связи вычисляются по формулам (1). Структура этого регулятора приведена на рис. 27.2.

Согласно теореме 2 для этой системы можно выбрать обратную связь первого порядка такую, что замкнутая система будет иметь произвольно желаемый характеристический многочлен 3-го порядка. Построим такой регулятор.

1. Вычислим характеристический многочлен матрицы A
 $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1; \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1.$

2. Зададимся многочленами: $\Phi_y(\lambda) = \lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2$
 и $\Phi_u(\lambda) = \lambda + \beta$, которые характеризуют динамику

системы, охваченной стационарной обратной связью по состоянию, и динамику идентификатора состояния соответственно.

3. Так как пара матриц $\{A, b\}$ имеет каноническое представление, то компоненты вектора k' сразу вычислим по формулам $k_1 = \gamma_2 - \alpha_2$, $k_2 = \gamma_1 - \alpha_1$, и, следовательно,

$$k' = \{\gamma_2 + 1, \gamma_1\}.$$

4. Теперь необходимо перейти к базису, в котором пара $\{A, c'\}$ имеет идентификационное каноническое представление. Переход к идентификационному каноническому представлению осуществляется с помощью матрицы

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразование с помощью этой матрицы всех матриц системы дает:

$$A: = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b: = Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ c': = c'P^{-1} = [0 \ 1], \quad k': = k'P^{-1} = \{\gamma_1, \gamma_2 + 1\}.$$

5. Остается преобразовать матрицы системы $\{A, b, c', k'\}$ с помощью преобразования

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате получим матрицы регулятора вида

$$A: = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -\beta^2 + 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix},$$

$$b: = Pb = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k': = k'P^{-1} = \{\gamma_1, \gamma_2 + 1\} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\gamma_1, \beta\gamma_1 + (\gamma_2 + 1)],$$

$$c': = c'P^{-1} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1].$$

На рис. 27.3 приведена структурная схема обратной связи вместе со структурной схемой объекта. На рис. 27.4 тот же регулятор изображен в соответствии с общей схемой рис. 27.1.

Стабилизация неустойчивого объекта 4-го порядка. Рассмотрим задачу выбора параметров регулятора для

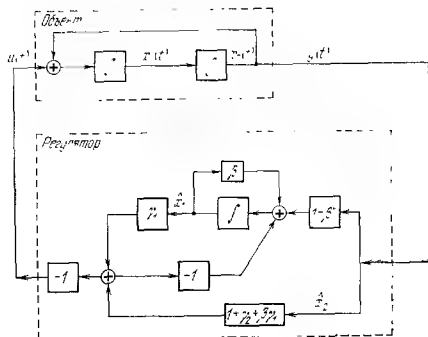


Рис. 27.3.

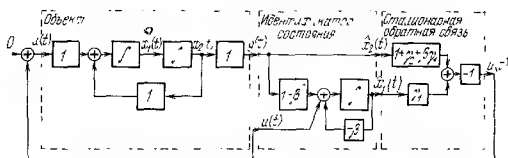


Рис. 27.4.

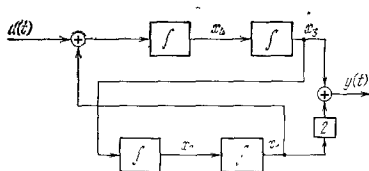


Рис. 27.5.

объекта 4-го порядка, структурная схема которого приведена на рис. 27.5. Уравнения этого объекта имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 + u, \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [2 \ 0 \ 1 \ 0].$$

Матрица управляемости:

$$U = [b, Ab, A^2b, A^3b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

имеет ранг 4, следовательно, система управляема. Так как ранг матрицы

$$[c, A'c, A'^2c, A'^3c] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

тоже равен 4, то система является и идентифицируемой. Согласно теореме 2 существует цепь обратной связи 3-го порядка такая, что характеристические числа замкнутой системы 7-го порядка совпадают с желаемым набором чисел. Вычислим коэффициенты этого регулятора.

1. Вычислим характеристический многочлен матрицы: $\varphi_A = \lambda^4 - 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -1$.

2. Зададимся многочленами цепи обратной связи и идентификатора $\varphi_\gamma(\lambda) = \lambda^4 + \gamma_1\lambda^3 + \gamma_2\lambda^2 + \gamma_3\lambda + \gamma_4$; $\varphi_\pi(\lambda) = \lambda^3 + \beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_3$.

3. Так как пара $\{A, b\}$ имеет канонический вид, то компоненты вектора k' сразу вычислим по формуле: $k_{n-i+1} = \gamma_i - \alpha_i$,

$$k' = [\gamma_4 + 1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1].$$

З а м е ч а н и е. Если бы пара матриц $\{A, b\}$ не имела канонический вид, то необходимо было бы построить матрицу преобразования к каноническому базису. $\odot$

4. Теперь перейдем к базису, в котором пара $\{A, c'\}$ имеет каноническое идентификационное представление. Соответствующая матрица перехода вычисляется по формулам теоремы 1 § 22. В нашем случае эти вычисления дают

следующий результат:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем все матрицы системы с помощью матрицы P :

$$A := PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := Pb = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c' := c'P^{-1} = [0001],$$

$$k' = [\gamma_4 + 1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1] \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-\frac{\gamma_2 + 2\gamma_1}{3}, -\frac{(\gamma_1 + 1) + 2\gamma_2}{3}, \frac{2\gamma_3 - \gamma_1}{3}, \frac{2(\gamma_4 + 1) - \gamma_2}{3} \right]$$

5. Теперь, следуя процедуре построения идентификатора размерности $n - 1$ (теорема 2 § 25), преобразуем матрицы системы с помощью невырожденной матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A := PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta_3 & 1 - \beta_1\beta_3 \\ 1 & 0 & -\beta_2 & \beta_3 - \beta_1\beta_2 \\ 0 & 1 & -\beta_1 & \beta_2 - \beta_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \end{bmatrix}, \quad b := Pb = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c' := c'P^{-1} = [0001],$$

$$k' := k'P^{-1} = [k_1, k_2, k_3, k_1\beta_3 + k_2\beta_2 + k_3\beta_1 + k].$$

где

$$k_1 = \frac{2\gamma_1 - \gamma_3}{3}, \quad k_2 = \frac{2\gamma_2 - (\gamma_4 + 1)}{3}, \quad k_3 = \frac{2\gamma_3 - \gamma_1}{3}, \\ k_4 = \frac{2(\gamma_4 + 1) - \gamma_2}{3}.$$

Напомним, что уравнения регулятора имеют вид

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \hat{\mathbf{x}}'(t) = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, y], \\ u(t) = -\mathbf{k}'\hat{\mathbf{x}}(t), \quad y(t) = x_4(t).$$

Структурная схема регулятора приведена на рис. 27.6.

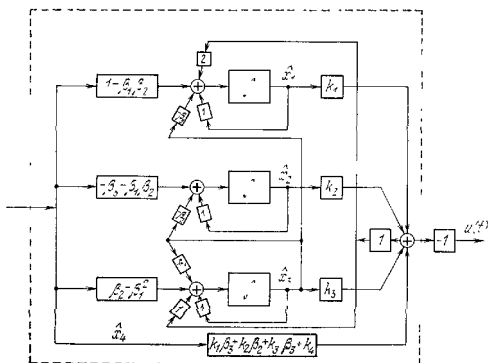


Рис. 27.6.

З а м е ч а н и е. Хотя вычисления структуры регуляторов проводятся по конечным формулам, тем не менее для систем высокого порядка могут возникнуть существенные трудности, связанные с вычислением обратной матрицы. Мы не станем заниматься здесь вопросами вычислений обратных связей для конкретных задач, а приводим лишь те алгоритмы организации таких вычислений.

которые непосредственно следуют из доказательств нужных нам результатов. Заметим, однако, что решение задачи о регуляторе сводится к традиционным вычислительным проблемам линейной алгебры, методы решения которых интенсивно разрабатываются.

Задачи. 1. Для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

вычислить цепь обратной связи 1-го порядка такую, чтобы замкнутая система имела следующие характеристические числа: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2 + i$, $\lambda_3 = -2 - i$.

2. Для системы, приведенной на рис. 27.5, выберите цепь обратной связи 3-го порядка такую, чтобы система имела характеристические числа. $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$, $\lambda_5 = -3$, $\lambda_6 = \lambda_7 = -1$. Числа λ_5 , λ_6 , λ_7 принадлежат идентификатору.

3. Двигатель постоянного тока имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{8}{p^3 + 9p^2 + 8p}.$$

Конструктор выбирает передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{4000}{(p+10)(p+10)(p+40)}.$$

Для оценки состояния возьмите фильтр Калмана с собственными числами $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -20$. Вычислите коэффициенты регулятора и нарисуйте его структурную схему.

4. Вычислите обратную связь «по выходу» для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

такую, чтобы собственные числа замкнутой системы были: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$. Вычислите матрицу обратной связи «по состоянию» для тех же условий [76].

§ 28. Управление отдельными модами

Модальное управление можно определить как управление, которое изменяет моды (собственные числа матрицы системы) с целью достижения желаемых целей управления. Ранее были рассмотрены регуляторы, которые обеспечивают управление всеми модами объекта. Часто управляемый объект имеет лишь небольшое число собственных

чисел, которые с помощью управления требуется сдвинуть в желаемые точки, оставляя остальные собственные числа без изменения. Тогда говорят об управлении отдельными модами объекта. Это управление, вообще говоря, проще вычислить и реализовать, чем управление, обеспечивающее возможность выбора всех характеристических чисел объекта. Такие задачи на практике часто возникают при управлении многомерными объектами.

Модальная управляемость. Для того чтобы существовало решение задачи о выборе управления, обеспечивающего изменение лишь некоторых собственных чисел системы при сохранении остальных собственных чисел, очевидно, не требуется, чтобы объект обладал свойством полной управляемости. Достаточно, чтобы он был модально управляем, т. е. допускал бы закон управления, изменяющий заданные моды объекта.

Пусть $\Gamma_q = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, $q \leq n$, — произвольный набор комплексных чисел, в котором каждое число присутствует вместе со своим сопряженным. В дальнейшем буква Γ будет обозначать только наборы чисел, обладающих этим свойством. Назовем систему $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ (ЛС) модально управляемой по отношению к набору Γ_q , если существует матрица обратной связи K такая, что q собственных чисел матрицы $[A - BK]$ совпадают с числами набора Γ_q . Матрицу K в этом случае называют матрицей модальной обратной связи или модальным регулятором.

Если $q = n$ и система (ЛС) модально управляема по отношению к произвольному набору чисел Γ_n , то (ЛС) называется полностью модально управляемой.

Предложение 1. Если существует базис в пространстве состояний, в котором система (ЛС) не является полностью модально управляемой, то (ЛС) не является полностью модально управляемой.

Доказательство. Пусть $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_1u(t) + Bu(t)$ не является полностью модально управляемой, а та же система, записанная в другом базисе пространства состояний $\hat{\hat{x}}(t) = A_1\hat{\hat{x}}(t) + B_1u(t)$, полностью модально управляема. Тогда векторы $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ связаны неособенным линейным преобразованием $\hat{x} = Px$. Поэтому $A = P^{-1}A_1P$, $B = P^{-1}B_1$, и значит, матрицы A и A_1 подобны. Поскольку пара $\{A_1, B_1\}$ полностью модально уп-

правляема, то существует матрица K_1 такая, что собственные значения $[A_1 - B_1 K_1]$ совпадают с Γ_n , где Γ_n — произвольный набор комплексных чисел. Далее, мы имеем $\dot{x}(t) = [A - BK_1 P] x(t) = P^{-1} [A_1 - B_1 K_1] P x$, и значит, матрица $[A_1 - B_1 K_1]$ подобна матрице $[A - BK_1 P]$, и поэтому пара $\{A, B\}$ полностью модально управляема. Полученное противоречие доказывает теорему. $\odot$

Для управляемой системы с одним входом справедливо

Предложение 2. Если пара $\{A, b\}$ управляема, то она и полностью модально управляема и соответствующий модальный закон управления единствен. $\odot$

Понятие полной модальной управляемости эквивалентно понятию управляемости. Об этом свидетельствует

Теорема 1. Пара матриц $\{A, B\}$ управляема тогда и только тогда, когда она полностью модально управляема.

Доказательство. Предположим, что пара $\{A, B\}$ полностью модально управляема, но не управляема. Тогда существует базис в пространстве R^n такой, что одна из компонент вектора состояния представима в виде $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$, где λ_i — собственное значение матрицы A (см. задачу 1). Поскольку уравнение для x_i не зависит от управлений и от других переменных состояния, то собственное значение λ_i нельзя изменить с помощью выбора матрицы обратной связи K . Отсюда следует, что система не является полностью модально управляемой, что противоречит первоначальному предположению. Мы доказали достаточность. Необходимость сразу следует из результатов § 23 (теорема 1). $\odot$

Управление одной и двумя модами. Теперь обсудим конструктивные методы построения модального управления, т. е. технику вычисления таких обратных связей, которые обеспечивают сдвиг некоторых собственных значений матрицы A в желаемые точки комплексной плоскости. Такая техника полезна при решении таких задач, когда объект не является управляемым, но модально управляем и может быть стабилизирован с помощью модальной обратной связи. Кроме того, часто и для управляемого объекта требуется построить такую обратную связь, которая смещала бы лишь некоторые моды этого объекта в заданные точки. При решении этой задачи можно воспользоваться общими алгоритмами (§ 23). Однако при

рицы A . Вектор $\mathbf{k}_1$ в общем случае системы с многими входами не единствен.

Аналогичную процедуру можно построить для выбора модального регулятора, обеспечивающего сдвиг двух собственных управляемых чисел объекта при неизменных остальных модах. Рассмотрим такой алгоритм для случая сдвига двух корней λ_1, λ_2 к желаемым значениям λ_1^*, λ_2^* . Пусть система (1) имеет управляемые собственные числа λ_1, λ_2 , вещественные и различные. Выберем $(m \times n)$ -матрицу K в виде $K = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, 0, \dots, 0]$, где $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ — первые два столбца этой матрицы. Тогда матрица замкнутой системы будет иметь вид

$[I - BK] -$

$$= \left[\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 - \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{k}_1 \rangle & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{k}_2 \rangle & & & \\ \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{k}_1 \rangle & \lambda_2 - \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{k}_2 \rangle & & & 0 \\ \hline & * & * & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & * & * & \lambda_3 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda_n & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{12} & A_{22} \end{array} \right],$$

Характеристический многочлен этой клеточно-диагональной матрицы равен произведению характеристических многочленов клеток, стоящих на диагонали,

$$\det [\lambda E - A - BK] = \det [\lambda E - A_{11}] \det [\lambda E - A_{22}] = \\ = \det [\lambda E - A_{11}] (\lambda - \lambda_3) (\lambda - \lambda_4) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Для того чтобы этот характеристический многочлен имел желаемые собственные числа λ_1^*, λ_2^* , необходимо потребовать, чтобы

$$\det [\lambda E - A_{11}] = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) = \lambda^2 - (\lambda_1^* + \lambda_2^*)\lambda + \lambda_1^*\lambda_2^*.$$

Это дает уравнение для векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$:

$$[\lambda - \lambda_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{k}_1 \rangle] [\lambda - \lambda_2 \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{k}_2 \rangle] - \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{k}_2 \rangle \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{k}_1 \rangle = \\ = \lambda^2 - (\lambda_1^* + \lambda_2^*)\lambda + \lambda_1^*\lambda_2^*.$$

Будем искать векторы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ в виде $\mathbf{k}_i = \delta_i \mathbf{k}_0$, $i = 1, 2$, где $\mathbf{k}_0$ — постоянный вектор, удовлетворяющий условиям $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{k}_0 \rangle \neq 0$, $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{k}_0 \rangle \neq 0$. Обозначим: $\beta_1 = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{k}_0 \rangle$, $\beta_2 = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{k}_0 \rangle$. Тогда уравнение относительно δ_1, δ_2 примет

вид

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 - \delta_1 \beta_1 & -\delta_2 \beta_1 \\ -\delta_1 \beta_2 & \lambda - \lambda_1 - \delta_2 \beta_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2^* \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Если приравнять коэффициенты многочленов в обоих частях этого равенства, то получим пару нелинейных уравнений относительно δ_1, δ_2 . Эти уравнения можно, однако, свести к линейным следующим образом:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 - \delta_1 \beta_1 & -\delta_2 \beta_1 \\ -\delta_1 \beta_2 & \lambda - \lambda_2 - \delta_2 \beta_2 \end{bmatrix} = \\ = \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 - \delta_1 \beta_1 & -\delta_2 \beta_2 \\ -\delta_1 \beta_2 & -\delta_2 \beta_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 - \delta_1 \beta_1 & -\delta_2 \beta_2 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Умножим вторую строку первого определителя в правой части этого равенства на $\beta_1 \beta_2^{-1}$ и вычтем из 1-й строки. Тогда получим в правой части равенства выражение

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 \\ -\delta_2 & -\delta_2 \beta_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 - \delta_1 \beta_1 & -\delta_2 \beta_2 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 \end{bmatrix},$$

и уравнение (2) сводится к такой линейной системе:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \beta_1 + \delta_2 \beta_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2^*) - (\lambda_1 + \lambda_2) \\ \lambda_1 \beta_2 \delta_1 + \lambda_2 \beta_1 \delta_2 &= \lambda_1^* \lambda_2^* - \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определитель этой системы

$$\det \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \lambda_1 \beta_2 & \lambda_2 \beta_1 \end{bmatrix} = \beta_1 \beta_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

в силу предположения $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Таким образом, нужные числа δ_1, δ_2 всегда найдутся.

Алгоритм вычисления модального регулятора K , обеспечивающего сдвиг двух управляемых мод системы, состоит из следующих шагов.

1. Выбираем базис в пространстве состояний, в котором матрица A имеет треугольную форму и первые два места на главной диагонали заняты сдвигаемыми модами λ_1, λ_2 .

2. Выбираем постоянный вектор k_0 , так, чтобы $\langle k_0, b_1 \rangle \neq 0$, $\langle k_0, b_2 \rangle \neq 0$. Это можно сделать потому, что пара мод λ_1, λ_2 управляема.

3. Вычисляем коэффициенты δ_1, δ_2 , решая линейную систему (3). Существование нужных δ_1, δ_2 обеспечивается тем, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

З а м е ч а н и е 1. Мы рассматривали простейший случай различных вещественных корней. Если корни — комплексные, то процедура сохраняется. При этом, однако, следует иметь в виду, что матрица перехода к базису, в котором матрица системы имеет треугольный вид, будет комплексной матрицей, и удобнее проводить все вычисления, имея в виду первоначальный базис системы. Если при применении модального регулятора комплексные числа объекта входят в набор по-прежнему вместе с сопряженными, то замкнутый объект будет по-прежнему физически реализуем. Для вычисления модального управления, которое обеспечивает сдвиг первых двух собственных значений, необходимо знать лишь эти собственные значения и соответствующие им собственные векторы.

З а м е ч а н и е 2. Для системы с многими входами обратная связь, обеспечивающая сдвиг одного или двух собственных значений, не единственна. Может существовать бесчисленное множество векторов k_0 , удовлетворяющих нужным требованиям. Выбор единственного k_0 из этого множества может быть основан на соображениях оптимальности по какому-либо критерию, чувствительности системы по отношению к изменениям параметров, оценки стоимости управлений по разным входам и т. п. Иногда вектор k_0 целесообразно выбирать таким, чтобы обеспечить минимальное значение коэффициентов усиления в цепи обратной связи.

Итерационное построение модального управления. Можно попробовать реализовать закон управления, сдвигающий l собственных значений в желаемые точки, последовательно применяя обратные связи, которые обеспечивают на каждой итерации сдвиг лишь одного-двух корней, оставляя неподвижными остальные корни системы. Общая обратная связь получается объединением обратных связей, вычисленных на каждой операции.

Рассмотрим систему с различными собственными значениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

записанную в таком базисе, в котором матрица A — треугольная. Первый шаг итерационной процедуры будет состоять в применении закона управления $u(t) = K^{(1)}x(t)$ такого, чтобы он сдвигал пару собственных значений

λ_1, λ_2 к значениям λ_1^*, λ_2^* соответственно. Подставляя эту обратную связь в уравнение системы, получим систему $\dot{x}(t) = A^{(1)} x(t) + Bu(t)$, где $A^{(1)} = A - BK^{(1)}$. Полученную систему снова можно привести к такой форме, чтобы матрица $A^{(1)}$ была бы треугольной. Предположим, что это преобразование выполнено, тогда на диагонали матрицы $A^{(1)}$ стоят собственные числа $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Если полученная матрица $A^{(1)}$ отвечает предъявляемым

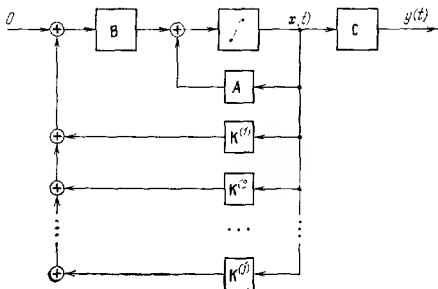


Рис. 28.1.

требованиям, то выбор обратной связи закончен. В противном случае выбираем модальную обратную связь $K^{(2)}$ так, чтобы $A^{(2)} = [A^{(1)} - B^{(1)} K^{(2)}]$ имела бы, например, собственные значения λ_3, λ_4 , совпадающими с числами λ_3^*, λ_4^* , а остальные собственные числа неизменными. Подобная итерационная процедура может быть продолжена, причем на каждой итерации некоторое число собственных чисел будет изменяться. После j шагов система будет иметь уравнение

$$\dot{x}(t) = A^{(j)} x(t) + Bu(t).$$

Графическое изображение этой процедуры представлено на рис. 28.1.

Ясно, что в таком рекурсивном алгоритме каждый шаг, да и все j шагов, легче осуществить, чем провести один шаг, сдвигающий сразу l мод объекта. Трудности вычислений экспоненциально растут при увеличении числа корней, сдвигаемых одновременно. Поэтому удобнее всего работать одновременно с одним или двумя собственными значениями. Если сдвигаемое собственное значение — действительное, то можно использовать шаг в итерационной процедуре, обеспечивающий сдвиг только одного собственного значения. Если же сдвигаем одновременно два собственных значения, то можно изменять как действительные, так и комплексно-сопряженные пары собственных значений.

В заключение этого параграфа заметим, что хотя управление отдельными модами и требует меньше вычислений, но приведенные алгоритмы можно реализовать лишь при наличии λ_i . Если же моды, которыми мы хотим управлять, не известны, то по-прежнему требуется решение системы линейных уравнений n -го порядка, и трудности вычисления управления, сдвигающего одну моду, эквивалентны трудностям при вычислении управления, сдвигающего все моды системы. Поэтому основная область применения управления отдельными модами, — это объекты, для которых известны нежелательные моды и требуется построить модальный регулятор, изменяющий только эти моды объекта и оставляющий неизменными все остальные моды. Вопросы управления отдельными модами рассмотрены в предположении, что все переменные состояния могут быть измерены и поданы на вход в виде обратной связи. Если это условие не выполняется, то необходимо строить оценки состояния, как это сделано в гл. V. Теория модального управления может быть применена и в этом случае. Подробности можно найти в работах [81, 84].

Задачи. 1. Докажите, что пара $\{A, B\}$ управляема тогда и только тогда, когда не существует базиса в пространстве R^n такого, что одна из компонент вектора состояний представима в виде $\dot{x}_i(t) = -\lambda_i x_i(t)$, где λ_i — собственные значения матрицы A .

2. Для управляемой системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, где $A = -E$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

выберите модальную обратную связь, при которой замкнутая система имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Для системы, приведенной в задаче 4 § 26, выберите модальную обратную связь, при которой пара собственных значений матрицы A станет $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, при сохранении неизменными остальных собственных чисел системы.

4. Пусть вещественная матрица A имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ — соответствующие собственные векторы. Постройте алгоритм сдвига $l < n$ собственных чисел матрицы A к желаемым значениям $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_l^*$, предположив, что пара $\{A, B\}$ управляема.

§ 29. Интегральная обратная связь

Мы рассматриваем конструирование систем управления на основе линейной модели. Эта модель, как правило, не точна. Неточности могут быть следствием допущений, сделанных относительно теоретических положений о процессе, следствием линеаризации уравнений нелинейной модели, могут возникать из-за ошибок в задании параметров процесса и по другим причинам. Кроме того, управляемые процессы часто подвержены влиянию возмущений, которые нельзя измерить. Чтобы добиться нечувствительности по отношению к внешним возмущениям и к ошибкам модели, в промышленных регуляторах всегда присутствует интегральная обратная связь. Для улучшения характеристик систем управления часто используется управление по возмущению. Здесь будут рассмотрены эти способы управления с точки зрения пространства состояний объекта.

Если не все переменные состояния доступны для измерения, то регулятор содержит динамическую систему — идентификатор, цель которой состоит в оценке переменных состояния, не доступных для измерения. Этот идентификатор обеспечивает наличие интегральной обратной связи. Однако из теории автоматического регулирования известно, что для исключения статической ошибки даже в объекте первого порядка, например, имеющем уравнение

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) + \Delta J(t),$$

уже требуется наличие интегратора в обратной связи. Вместе с тем, если у этого объекта измеряется переменная $x(t) = y(t)$, то, казалось бы, для восстановления состояния не требуется идентификатор и для обеспечения желаемых динамических свойств замкнутой системы достаточно стационарной обратной связи. На самом деле это не так. Если скоро имеются неконтролируемые возмущения, действующие на объект в процессе регулирования, то состояние объекта $x(t)$ вместе с управлением $u(t)$ не достаточно для предсказания выхода в будущем из-за наличия помехи. Чтобы можно было по-прежнему решать задачу регулирования в рамках схемы: «состояние — идентификатор состояния — обратная связь по состоянию», необходимо ввести фиктивные переменные состояния, которые содержали бы информацию о помехе.

Аддитивная помеха в канале измерения. Рассмотрим простейший устойчивый объект 1-го порядка

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t).$$

Пусть переменная состояния этого объекта измеряется с постоянной ошибкой Δ . В этом случае уравнение наблюдения имеет вид

$$y(t) = x(t) + \Delta(t), \quad \Delta(t) = \text{const.}$$

Если использовать обратную связь по выходу $u(t) = -ky(t)$, то замкнутая система будет содержать статическую ошибку. При $t \rightarrow \infty$ имеем $-ax(t) - k(x(t) + \Delta) = 0$ и, следовательно, $x(t) = \frac{-k\Delta}{a+k} \neq 0$. Таким образом, хотя объект — 1-го порядка, но его переменная состояния $x(t)$ не доступна для измерения, и для того, чтобы воспользоваться преимуществами «обратной связи по состоянию», необходимо построить динамическую систему для оценки $x(t)$. Введем новую переменную состояния $\Delta(t)$ с уравнением $\dot{\Delta}(t) = 0$. Тогда уравнения объекта примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) + u(t), \\ \dot{\Delta}(t) &= 0, \quad y(t) = x(t) + \Delta(t). \end{aligned}$$

Матрицы этого объекта

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 1]. \quad (1)$$

Заметим, что пара $\{A, b\}$ неуправляема, но пара $\{A, c'\}$ идентифицируема, поскольку $\{A', c\}$ управляема. Действительно,

$$U = [c, A'c] = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и ранг $U = 2$. Построим идентификатор Льюенбергера для оценки состояния этого объекта 2-го порядка. При этом воспользуемся заменой переменной (см. § 26, формула (12)). Пусть

$$z(t) = x(t) + l\Delta(t), \quad y(t) = x(t) + \Delta(t),$$

тогда

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \Delta(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x(t) \\ \Delta(t) \end{bmatrix},$$

и при $l \neq 1$ матрица P — неособенная. Вычислим

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-l} & -\frac{l}{1-l} \\ -\frac{1}{1-l} & \frac{1}{1-l} \end{bmatrix}$$

и построим идентификатор для переменной $z(t)$. Тогда оценки переменных состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{1}{1-l} \hat{z}(t) - \frac{l}{1-l} y(t), \\ \hat{\Delta}(t) &= -\frac{1}{1-l} \hat{z}(t) + \frac{1}{1-l} y(t). \end{aligned}$$

Теперь необходимо преобразовать матрицы $\{A, b\}$ с помощью матрицы P . Это преобразование дает

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & l \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-l} & -\frac{l}{1-l} \\ -\frac{1}{1-l} & \frac{1}{1-l} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-l} & -\frac{l}{1-l} \\ -\frac{1}{1-l} & \frac{1}{1-l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a}{1-l} & \frac{la}{1-l} \\ \frac{-a}{1-l} & \frac{la}{1-l} \end{bmatrix}, \\ Pb &= \begin{bmatrix} 1 & l \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_{zz} = \frac{-a}{1-l}, \quad A_{zu} = \frac{la}{1-l}, \quad l_1 = 1.$$

Уравнение идентификатора для переменной $z(t)$ в соответствии с формулой (13) § 26 имеет вид

$$\dot{\hat{z}}(t) = -\frac{a}{1-l}\hat{z}(t) + \frac{la}{1-l}z(t) + u(t), \quad \hat{z}(0) = 0.$$

Теперь, используя оценку переменной состояния $\hat{x}(\cdot)$ можно построить обратную связь вида $u(t) = k\hat{x}(t)$. Общий вид уравнений замкнутой системы таков:

$$\dot{\hat{x}}(t) = -ax(t) + u(t),$$

$$\dot{\hat{z}}(t) = -\frac{a}{1-l}\hat{z}(t) + \frac{la}{1-l}y(t) + u(t).$$

$$y(t) = x(t) + \Delta, \quad \hat{x}(t) = \frac{1}{1-l}\hat{z}(t) - \frac{l}{1-l}y(t),$$

$$u(t) = -k\hat{x}(t).$$

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 29.1. Ее собственные числа равны собственному

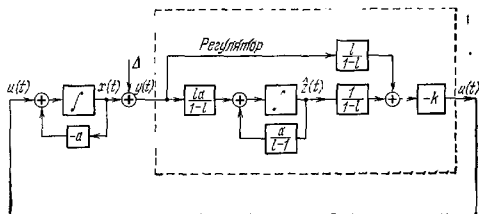


Рис. 29.1.

значению идентификатора $\lambda_1 = \frac{a}{1-l}$ и собственному значению объекта, охваченного обратной связью по состоянию $\lambda_2 = -a - k$. При $k > -a$, $l < 1$ замкнутая система устойчива.

Вычислим передаточную функцию полученного регулятора. Она имеет вид

$$W(p) = \frac{\frac{kl}{1-l} p}{p + \frac{k+a}{1-l}}.$$

Уравнение регулятора получено без привлечения каких бы то ни было дополнительных инженерных соображений о виде его передаточной функции. В рассуждениях использованы только следующие понятия: состояние, обратная связь по состоянию, идентификатор состояния.

З а м е ч а н и е. Хотя рассматриваемая система и имеет второй порядок, переменной Δ не соответствует в этой системе никакой динамический элемент. Поэтому выбираем обратную связь только по переменной $x(t)$, используя полученную для этой переменной оценку $\hat{x}(t)$. Можно рассуждать по-другому. Система (1) является неуправляемой, но она модально управляема по отношению к переменной $x(t)$. Поэтому выбираем обратную связь по состоянию (а значит, используем информацию об обеих переменных состояния $x(t)$, $\Delta(t)$) такую, чтобы первое собственное значение объекта имело бы заданное значение.

Постоянное возмущение на входе. Рассмотрим тот же устойчивый объект 1-го порядка при наличии аддитивной помехи на входе объекта. Уравнение объекта в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -ax(t) + u(t) + \Delta, \\ y(t) &= x(t).\end{aligned}$$

Обратная связь вида $u(t) = -ky(t)$ не избавляет от статической ошибки и в этом случае. Поступим аналогично тому, как было сделано выше. Введем новую переменную состояния с уравнением $\dot{\Delta}(t) = 0$. Тогда система 2-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -ax(t) + \Delta + u(t), \\ \dot{\Delta}(t) &= 0, \\ y(t) &= x(t), \\ A &= \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \ 0]\end{aligned}$$

полностью идентифицируема. Построив идентификатор состояния этой системы, можно, как и раньше, получить требуемую интегральную обратную связь. Однако нетрудно видеть, что в этом нет необходимости, поскольку эта задача эквивалентна предыдущей. Достаточно привести помеху на входе системы к выходу.

Рассмотрим невырожденное преобразование переменных: $z(t) = x(t) + \frac{\Delta}{a}$; $\Delta(t) = \Delta(t)$. Матрица этого преобразования имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно общему правилу, преобразуем матрицы $\{A, b, c'\}$ по формулам: $A := PAP^{-1}$, $b := Pb$, $c' := P^{-1}c$. В новом базисе матрицы системы примут вид

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$$

Эта система имеет уже единственную помеху на выходе, и регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость для этой системы, совпадает с приведенным на рис. 29.1. Поскольку невырожденная замена переменной не изменяет соотношения между входом и выходом системы (не меняет передаточной функции объекта), задача выбора регулятора решена для случая аддитивной помехи на входе.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что выбор переменных состояния при наличии помех не является однозначным. В рассмотренном примере в качестве переменных состояния можно взять пару $\{x(t), \dot{x}(t)\}$, или пару $\{x(t), u(t)\}$, или $\{y(t), x(t)\}$, или линейные комбинации этих переменных.

Интегральная обратная связь для многомерного объекта. Рассмотрим многомерный случай. Пусть уравнения линейной стационарной системы представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + D\Delta, \end{aligned}$$

где Δ — вектор $r \times 1$, а D — матрица $p \times r$, Δ — произвольный вектор постоянного возмущения при измерении,

Мы рассматриваем по-прежнему детерминированный случай. Потребуем, чтобы система удовлетворяла условиям асимптотической устойчивости по отношению к выходу, т. е. $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и, кроме того, $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Вектор помехи Δ мы считаем неизмеримым. Пусть $(p \times n)$ -матрица C имеет ранг p и $p \geq m$, где m — размерность вектора $u(t)$. Будем предполагать, что все уравнения рассматриваемой системы линейно независимы. Если это условие не выполняется, то можно понизить порядок системы, исключив ее линейно зависимые уравнения. Введем новый вектор состояния $z'(t) = [\dot{x}'(t), y'(t)]$ и новое управляющее воздействие по формуле $v(t) = \dot{u}(t)$. Дифференцируя исходное уравнение системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, получим следующую систему уравнений относительно переменных состояния $z(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t), \\ z(0) &= \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \\ \Delta(0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку по предположению матрица C имеет ранг p , то матрица в уравнении (2) имеет полный ранг $n + p$ и $z(0)$ может быть любым вектором в области значений этой матрицы. Наша задача относительно переменной $z(t)$ заключается в том, чтобы обеспечить $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ из любых начальных состояний $z(0)$. Эти условия могут быть выполнены, если пара $\{A, B\}$ управляема, а матрица $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ имеет полный ранг $n + p$. Более того, в этом случае мы можем произвольно выбирать динамику замкнутой системы за счет выбора стационарной обратной связи по состоянию $z(t)$ вида $v(t) = Kz(t)$. После перехода к прежним координатам получим равенство

$$v(t) = \dot{u}(t) - K_1 \dot{x}(t) + K_2 y(t),$$

интегрируя которое, вычислим искомое управление

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t y(t) dt + K_2 y_0, \quad (3)$$

где y_0 — вектор начальных условий, задаваемых на p интеграторах. Обычно $y_0 = 0$.

Управление, как, впрочем, и в одномерном случае, не использует информацию ни о векторе возмущений Δ , ни о матрице D . Эти сведения нужны лишь для формирования начальных условий согласно уравнению (2). Наши рассуждения сформулируем в виде теоремы, доказательство которой оставляем читателю. См. также [59, 60].

Т е о р е м а 1. *Линейная стационарная система*

$$\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}v(t), \quad \text{где} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

является управляемой тогда и только тогда, когда:

1) пара $\{A, B\}$ управляема, 2) матрица $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ имеет ранг $n + p$. В этом случае с помощью обратной связи вида $v(t) = Kz(t)$ замкнутой системе можно придать произвольные динамические свойства. Если обратная связь $v(t) = Kz(t)$ выбрана так, что многочлен $\Phi(\lambda) = -\lambda^{n+p} + \alpha_1 \lambda^{n+p-1} + \dots + \alpha_{n+p} = 0$ является характеристическим многочленом $(n + p)$ -го порядка замкнутой системы, то этот многочлен будет характеристическим многочленом системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + D\Delta, \end{aligned}$$

охлажденной интегральной обратной связью вида

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t y(t) dt + K_2 y_0.$$

Если многочлен $\Phi(\lambda)$ устойчив, то выполняются условия $y(t) \rightarrow 0$, $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. $\odot$

Таким образом, закон управления, обеспечивающий замкнутой системе заданную динамику, можно рассчитывать, рассмотрев вспомогательную систему (4). Очевидно, этот подход аналогичен тому, который был рассмотрен

при исследовании возмущений в системах 1-го порядка. Разница в том, что там мы брали в качестве новых переменных состояния выход $y(t)$ и линейную комбинацию $x(t)$ и $\Delta(t)$, а здесь берем $\dot{x}(t)$ и $y(t)$. Но зная $\dot{x}(t)$ и $y(t)$, можно вычислить Δ и $x(t)$. Если не требуется выбрать динамику замкнутой системы, а необходимо лишь стабилизировать эту систему, то вместо требования управляемости пары $\{A, B\}$ достаточно требования модальной управляемости по отношению к ее неустойчивым модам.

Управление по возмущению. Если помеха доступна для измерения, то задача управления существенно упрощается. Начнем со скалярного случая. Пусть

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad y(t) = x(t) + \Delta$$

и помеха Δ измеряется. Тогда управление вида $u(t) = -ky(t) + k\Delta$, $k > 0$, обеспечивает стабилизацию системы, поскольку

$$u(t) = -k[x(t) + \Delta] + k\Delta = -kx(t)$$

и мы имеем обратную связь по состоянию. Управление в присутствии помехи сводится к управлению без помехи с помощью вычитания измеряемого сигнала помехи из выходного сигнала. Чтобы выполнить такое вычитание в матричном случае, необходимо провести некоторые преобразования координат в пространстве состояний. Итак, пусть

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + F\Delta, \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\Delta, \end{aligned}$$

и помеха Δ измеряется. Введем в рассмотрение матрицы

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H = \begin{bmatrix} F \\ D \end{bmatrix}$$

размеров $(n + p) \times (n + m)$, $(n + p) \times r$ соответственно и предположим, что ранг матрицы N равен $n + p$. Определим $(n + p)$ -мерный вектор равенством

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = -[N^+ H \Delta]',$$

где через N^+ обозначена матрица $N^+ = [N'N]^{-1}N'$. Поскольку N имеет ранг $(n + p)$, то $(n + p) \times (n + p)$ -

матрица $N'N$ обратима. Рассмотрим теперь преобразование переменных $z = x - \hat{x}$, $v = u - \hat{u}$. Заметим, что z и v равны отклонениям от требуемых конечных значений переменных состояния и управляющих переменных соответственно. Проведя это преобразование переменных, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bv(t) + q_1, \\ y(t) &= Cz(t) + q_2, \\ z(0) &= x(0) - \hat{x}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где векторы q_1 и q_2 определены равенством

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = [E - NN^+] H \Delta.$$

Требование $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ и $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для исходной системы уравнений эквивалентно требованию $\dot{z}(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для преобразованной системы. Эти условия будут выполнены в том случае, если пара $\{A, B\}$ управляема и векторы q_1 и q_2 равны нулю. Последнее условие эквивалентно требованию $NN^+H = H$, откуда $NN^+ = E$. Управляющее воздействие вида $v(t) = Kz(t)$ обеспечивает в силу управляемости пары $\{A, B\}$ желаемые динамические свойства замкнутой системы. Возвращаясь к исходным координатам, получим управление $u(t)$ в виде

$$u(t) = Kx(t) + [K - E]N^+H\Delta,$$

где $N^+ = [NN']^{-1}N'$. Это управление содержит измеряемую помеху Δ . Проведенную схему вычислений суммируем в виде следующего результата, доказательство которого оставляем читателю.

Т е о р е м а 2. Если в линейной стационарной системе (5) вектор возмущения Δ измеряется, то системе можно придать произвольные динамические свойства с помощью обратной связи вида

$$u(t) = Kx(t) + [K - E][NN']^{-1}N'\Delta$$

в том и только в том случае, когда

1) пара $\{A, B\}$ управляема,

2) ранг матрицы $N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ равен $n + p$, где p — число линейно независимых выходов системы. $\odot$

Таким образом, условия существования требуемого управления по возмущению при измеримых возмущениях совпадают с условиями существования управления в виде интегральной обратной связи при неизмеримых возмущениях.

Поскольку система с управлением по возмущению чувствительна к ошибкам измерения и к вариациям параметров объекта, то на практике комбинируют управление по возмущению (которое позволяет быстро реагировать на значительные помехи) и управление в виде интегральной обратной связи (которое обеспечивает астатизм системы даже по отношению к малым неконтролируемым возмущениям и улучшает характеристики чувствительности системы по отношению к вариациям ее параметров).

Задачи. 1. Получите уравнение интегральной обратной связи в примере 1, приняв в качестве переменных состояния $x(t)$, $u(t)$ и $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$.

2. Рассмотрите объект

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\alpha x(t) + \Delta_1 + u(t), \\ y(t) &= x(t) + \Delta_2,\end{aligned}$$

где Δ_1 , Δ_2 — некоторые неизвестные постоянные. Сконструируйте регулятор так, чтобы при $t \rightarrow \infty$ $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ и $y(t) \rightarrow 0$. Какое минимальное число динамических элементов должен содержать такой регулятор?

3. Для объекта 2-го порядка $\ddot{x}(t) + x(t) = u(t)$, $y(t) = x(t) + \Delta$, где Δ — постоянная неизмеримая помеха, выберите регулятор, который обеспечивает выполнение условий $\dot{x}(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 0$ при любых Δ . Каков минимальный порядок этого регулятора?

4. Для задачи 3 рассмотрите возмущение вида $\Delta(t) = \sin \omega t$, где ω — некоторая постоянная.

5. Линейная стационарная система

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 1 \ 0]$$

имеет помеху в канале измерения

$$y(t) = c'x(t) + \Delta(t).$$

Можно ли придать этой системе произвольные динамические свойства с помощью соответствующим образом подобранного регулятора, если неконтролируемое возмущение $\Delta(t)$ имеет вид $\Delta(t) = \sin \omega t$? Зависит ли результат решения задачи от частоты возмущения ω ?

6. Определите, каков минимальный порядок динамической обратной связи, которая позволяет получить произвольное

размещение полюсов линейной системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§ 30. Модальное управление распределенной системой

Рассмотрим примеры модального управления распределенной системой для случаев, когда задача управления распределенной системой сводится к задаче управления конечномерным объектом.

Аппроксимация распределенной системы с помощью конечного числа мод. Рассмотрим простейшее уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial l^2}, \quad 0 \leq l \leq 1, \quad t > 0, \quad Q(l, 0) = Q_0(l) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial l} \right|_{l=0} = 0, \quad - \left. \frac{\partial Q}{\partial l} \right|_{l=1} = \beta [u(t) - Q(1, t)]. \quad (2)$$

Это уравнение описывает, например, температурное поле в тонком стержне единичной длины и единичного сечения, теплоизолированном с боковых поверхностей и с одного торца $l = 0$. $u(t)$ — температура нагревателя, расположенного у торца стержня $l = 1$. Тепловой поток при $l = 1$ пропорционален с коэффициентом « β » разности температур нагревателя и торцевой поверхности стержня. Известно, что решение задачи (1), (2) можно представить в виде [8]

$$Q(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n l x_n(t),$$

где $x_n(t)$ являются решениями уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= -\mu_n^2 x_n(t) + \mu_n^2 u(t), \quad n = 1, 2, \dots, \\ x_n(0) &= x_n^0, \quad A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а числа μ_n — корни характеристического уравнения $\mu = b \operatorname{ctg} \mu$. Формально систему уравнений (3) можно записать в матричной форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

где A — диагональная матрица бесконечной размерности:

$$A = \operatorname{diag} [-\mu_1^2, -\mu_2^2, \dots, -\mu_n^2, \dots], \quad x'(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots], \quad b'(t) = [\mu_1^2, \mu_2^2, \dots].$$

Часто с целью расчета практически приемлемых законов управления рассматривают лишь первые несколько мод системы, считая, что при больших n вклад членов $A_n \cos \mu_n x_n(t)$ незначителен [8, 9]. Это может быть оправдано тем обстоятельством, что «переходная матрица» бесконечномерной системы (4) имеет вид

$$\Phi(t, 0) = \operatorname{diag} [e^{-\mu_1^2 t}, e^{-\mu_2^2 t}, \dots],$$

а числа μ_n согласно характеристическому уравнению удовлетворяют неравенствам $(n-1)\pi \leq \mu_n \leq n\pi$, и следовательно, величина μ_n^2 быстро возрастает при повышении порядкового номера n . Сведение задачи об управлении распределенной системы к конечномерной используется при решении задачи оптимального управления методом моментов [8, 9, 43]. Если поступать формально, считая, что распределенная система достаточно точно описывается своими первыми n модами, то задача об управлении такой системы сводится к управлению следующей конечномерной системой с одним входом:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

где $A = \operatorname{diag} [-\mu_1^2, -\mu_2^2, \dots, -\mu_n^2], \quad b' = [\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2]$.

Нетрудно проверить, что пара матриц $\{A, b\}$ полностью управляема и, следовательно, с помощью обратной связи по состоянию можно обеспечить наличие у замкнутой системы произвольного набора собственных чисел. Заметим, что набор собственных чисел $\{\mu_i\}$ определен, если задать значение коэффициента β , определяемого по геометрическим размерам, внутренним свойствам (коэффициент теплопроводности) и условиям внешнего теплооб-

мена (коэффициент теплоотдачи). Пусть распределенная система имеет фиксированное значение β и соответствующий набор $\{\mu_i\}$. Зададим некоторый желаемый параметр $\beta^* \neq \beta$ и вычислим по уравнению $\mu = b^* \operatorname{ctg} \mu$ характеристические числа $\{\mu_i^*\}$. Так как система управляема, то можно выбрать вектор обратной связи k' так, чтобы замкнутая система $\dot{x}(t) = [A - bk']x(t)$ имела бы набор собственных чисел $\{\mu_i\}$. Вообще говоря, это в некотором смысле равносильно изменению внутренних свойств распределенной системы с помощью активной линейной обратной связи по состоянию. Так, если коэффициенту теплопроводности стержня λ соответствует набор собственных чисел $\{\mu_i\}$, а значению этого коэффициента λ^* — набор $\{\mu_i^*\}$, то выбором обратной связи можно обеспечить системе набор чисел $\{\mu_i^*\}$. При этом предполагается, что все переменные состояния системы доступны для измерения и, кроме того, что поведение распределенной системы точно описывается с помощью ее первых n мод. Снять эти допущения — сложная задача. Здесь заметим, что если измеряется температура в какой-либо точке стержня $0 \leq l_1 \leq 1$ и если система представлена с помощью первых n мод, то уравнение выхода имеет вид

$$y(t) = Q(l_1, t) = \sum_{i=1}^n A_n \cos \mu_n l_1 x_n(t) = c'x(t),$$

где $c' = [A_1 \cos \mu_1 l_1, A_2 \cos \mu_2 l_1, \dots, A_n \cos \mu_n l_1]$, и не трудно проверить, что пара $\{A, c'\}$ полностью наблюдаема для всех $l_1 \in [0, 1]$. Следовательно, можно построить идентификатор этой системы и произвольными динамическими свойствами. По поводу точности аппроксимации распределенных систем конечным числом мод имеется обширная литература. Библиографию можно найти в [8, 9].

Стабилизация неустойчивой распределенной системы. В некоторых случаях неустойчивость линейной распределенной системы связана лишь с конечным числом ее неустойчивых мод. Однако обычно для стабилизации таких систем требуется знание состояния системы во времени. Задача получения приемлемой оценки состояния распределенной системы необычайно трудна. В приводимом ниже простом примере [87] для стабилизации системы требуется только информация о ее неустойчивых модах,

Снова рассмотрим одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial Q(t, l)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(t, l)}{\partial l^2} + \alpha Q(t, l) + u(t, l), \quad (5)$$

определенное при $t > 0$, $l \in [0, 1]$. Здесь $Q(t, l)$ — состояние системы (например, распределение температуры в стержне), а $u(t, l)$ — управление. Начальные и граничные условия заданы соотношениями

$$Q(0, l) = Q_0(l), \quad Q(t, 0) = Q(t, 1) = 0, \quad 0 \leq l \leq 1, t > 0, \quad (6)$$

где $Q_0(l)$ — непрерывная функция времени. Предполагая, что $u(t, l)$ непрерывно дифференцируемая функция обоих аргументов и $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$, запишем решение (5), (6) в виде

$$Q(t, l) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(l) x_n(t), \quad \Psi_n(l) = \sqrt{2} \sin \pi n l.$$

Обозначим $\mathbf{x}'(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots]$. Тогда $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} x_i'(0) &= x_i^0, \\ Q_0(l) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n'(0) \Psi_n(l), \\ u(t, l) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \Psi_n(l), \quad \mathbf{b}'(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots]. \end{aligned}$$

а A — диагональная матрица бесконечной размерности с диагональными элементами $\lambda_n = -n^2\pi^2 + \alpha$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $(m+1)^2\pi^2 > \alpha > m^2\pi^2$ для некоторого положительного целого m , так что первые m мод системы неустойчивы.

Мы хотим построить обратную связь такую, чтобы все моды замкнутой системы были устойчивы. Очевидно, что если $Q(t, l)$ можно точно измерить в любой момент времени, то любая обратная связь вида $u(t, l) = kQ(t, l)$,

где $k \leq -\alpha$, обеспечит стабилизацию системы. Рассмотрим конечномерную стабилизирующую обратную связь, которую можно реализовать. Пусть управляющее воздействие задано в виде

$$u(t, l) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(l) u_i(l),$$

где $\sigma_i(l)$ — некоторые непрерывные функции, число m равно числу неустойчивых мод объекта, а вектор $u'(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]$ представляет собой искомое конечномерное управление. В практических ситуациях $\sigma_i(l) u_i(l)$ может описывать управление, которое локализовано на подмножествах Ω отрезка $[0, 1]$, а $\sigma_i(l)$ является подходящей непрерывной функцией, заданной на Ω . Очевидно, вектор $b(t)$ в уравнении (7) может быть представлен в виде

$$b(t) = Bu(t),$$

где

$$B = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1, \Psi_1 \rangle & \langle \sigma_2, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle \sigma_m, \Psi_1 \rangle \\ \langle \sigma_1, \Psi_2 \rangle & \langle \sigma_2, \Psi_2 \rangle & \dots & \langle \sigma_m, \Psi_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

и

$$\langle \sigma_i, \Psi_n \rangle = \int_0^1 \sigma_i(l) \Psi_n(l) dl.$$

Пусть B_m обозначает $(m \times m)$ -матрицу, образованную первыми m строками матрицы B . Если $\sigma_i(l)$ выбраны так, что матрица B_m имеет обратную, то простая стабилизирующая обратная связь для уравнения (3) имеет вид

$$u(t) = -B_m^{-1} K P_m x(t), \quad (8)$$

где K — диагональная матрица с элементами $k_{jj} = \alpha - j^2 \pi^2$, $j = 1, 2, \dots, m$, а матрица P_m является матрицей оператора проектирования, определенного соотношением $P_m a = [a_1, a_2, \dots, a_m]'$ для всех $a' = [a_1, a_2, \dots]$. Оператор P_m , таким образом, проектирует бесконечномерное пространство последовательностей вида $[a_1, a_2, \dots]$, обычно обозначаемое через l_2 ,

в конечномерное пространство R^m . Заметим, что в законе управления (8) участвуют только амплитуды неустойчивых мод. Предполагается, что все неустойчивые моды идентифицируемы, или точно измеряемы.

Уравнение системы, охваченной обратной связью, имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A - BB_m^{-1}KP_m] x(t). \quad (9)$$

Поскольку матрица

$$[A - BB_m^{-1}KP_m] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 - k_{11} & \dots & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & 0_{m\infty} \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & \dots & \lambda_m - k_{mm} & & & \\ \hline & & & \lambda_{m+1} & \dots & 0 \dots \\ & ? & & \vdots & \lambda_{m+2} & \\ & & & 0 & & \ddots \\ & & & \vdots & & \end{array} \right]$$

(здесь $0_{m\infty}$ — нулевая матрица, ? — матрица с возможно ненулевыми элементами размеров $\infty \times m$) является треугольной, то ее собственные значения λ_i , $i > m$, совпадают со стабильными модами разомкнутой системы, в то время как все нестабильные моды отрицательны за счет выбора матрицы K . Таким образом, $a_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ при любом $i = 1, 2, \dots$

Геометрическая интерпретация данного примера состоит в следующем. Пространство состояний распределенной системы, совпадающее с пространством l_2 , мы разлагаем в прямую сумму конечномерного подпространства X_m , которое содержит только нестабильные моды объекта, и бесконечномерного подпространства $X_m^\perp$, содержащего устойчивые моды объекта. Так как подсистема, определенная в X_m , управляема, идентифицируема и имеет конечную размерность, то можно построить стабилизирующую обратную связь (линейное отображение на X с конечномерным рангом) такую, что подпространство $X^\perp$ является инвариантным при отображении $A + Bu$ и собственные значения или частоты устойчивых мод остаются при этом преобразовании без изменений.

Заметим, что данная процедура пригодна для изменения первых r собственных значений устойчивой системы ($\alpha = 0$), если предположить, что информация о соответствующих модах системы имеется.

Задача 1. Для уравнения (5), (6), где $\alpha = 0$, $u(l, t) = b(l)u(t)$, а

$$b(l) = \begin{cases} b & \text{при } 1/4 \leq l \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

выберите управление $u(t)$ в виде обратной связи, считая, что необходимые данные о состоянии системы имеются, такое, чтобы первые два собственных значения системы совпали с числами $\lambda_1 = -8\pi^2$, $\lambda_2 = -12\pi^2$, а остальные собственные значения остались неизменными.

2. Для системы (1), (2) при $\beta = 1$, ограничившись двумя первыми модами ряда решения, и считая, что измеряется температура в точке $l = 0$, сконструируйте регулятор, который придавал бы системе собственные числа, определяемые как первые два корня уравнения $\mu = 2 \operatorname{ctg} \mu$. В качестве идентификатора состояния используйте фильтр Калмана с собственными числами $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$.

§ 31. Следящая система

Рассмотрим, основываясь на модальных соображениях, синтез следящих систем, обеспечивающих точное слежение за командными сигналами сложной формы при наличии неизвестных и неизмеримых возмущений. Основная идея решения этой задачи аналогична той, которая была использована для обоснования введения интегральной обратной связи в § 29. Мы рассмотрим неизвестный сигнал помехи и командный сигнал как выходы некоторых идентифицируемых динамических систем, структура которых известна, а начальное состояние произвольно. Далее мы построим следящую систему для «идеального» случая в предположении, что состояния фиктивных динамических систем, выходы которых совпадают с помехой и командным сигналом, нами точно измеряются в любой момент времени. Затем построим идентификаторы состояний этих динамических систем и, заменяя в формулах для идеального случая состояние его оценкой, получаемой на выходе идентификаторов, придем к физически реализуемой конструкции следящей системы. Из-за отсутствия места будем опускать промежуточные выкладки при решении

возникающих в процессе конструирования алгебраических задач.

В заключение будет дан подробный пример конструирования следящей системы для объекта 2-го порядка. Излагаемый здесь подход неоднократно уже упоминался в литературе в связи с задачей конструирования следящих систем (см., например, [83], [89]). Наше изложение близко следует работе [63], в которой рассматривается задача для общего нестационарного случая. Мы ограничимся рассмотрением стационарной системы.

Постановка задачи. Пусть управляемый и идентифицируемый стационарный объект описан уравнением

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fw(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где, как обычно, $x(t)$ — n -вектор состояния, $u(t)$ — m -вектор входных возмущений, $y(t)$ — p -вектор выходов и $w(t)$ — r -вектор внешних возмущений, A, B, F, C — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$, $n \times r$, $p \times n$ соответственно. Будем предполагать, что выходы объекта линейно независимы, так что $\text{rang } C = p$. Задача управления объектом будет заключаться в том, чтобы выбрать вход $u(t)$ так, чтобы выход объекта $y(t)$ по возможности точно следовал за некоторым заданным p -мерным командным сигналом $u_k(t)$, который заранее не известен, но измеряется (появляется) в текущий момент времени t . Более того, требуется обеспечить удовлетворительное слежение за командным сигналом при действии на объект неизвестной внешней помехи $w(t)$.

Типичным примером такой задачи является задача обеспечения высокоточного слежения антенной радиолокатора за летящим объектом при воздействии на антенну порывов ветра и при непредвиденных маневрах летящей цели.

Начнем рассмотрение задачи с представления сигнала помехи и командного сигнала с помощью «переменных состояния». Здесь уместно напомнить, что аналогичные представления были использованы нами при конструировании асимптотического дифференциатора в § 25, а также в § 29.

Пусть командный сигнал $y_k(t)$ является выходом некоторой фиктивной динамической системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= R\mathbf{r}(t), \\ y_k(t) &= G\mathbf{r}(t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем $y_k(t)$ можно непосредственно измерить. Матрицы R, G известны, их размерность $v \times v, p \times v$ соответственно. v -вектор $\mathbf{r}(t)$ представляет собой «состояние» командного процесса. Вектор $\mathbf{r}(t)$ может скачкообразно изменяться в произвольные моменты времени за счет изменения начальных условий. Внешнее возмущение $w(t)$ появляется на выходе фиктивной динамической системы

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= D\mathbf{z}(t), \\ w(t) &= H\mathbf{z}(t), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $w(t)$ недоступно для непосредственного измерения, матрицы D и H размеров $\rho \times \rho$ и $r \times \rho$ заданы, ρ -вектор $\mathbf{z}(t)$ является «состоянием» процесса помехи, начальные условия в (3) неизвестны и могут скачкообразно изменяться в произвольные моменты времени.

Заметим, что функции $y_k(t)$ и $w(t)$ могут быть разрывны из-за возможного скачкообразного изменения начальных условий. С помощью динамических процессов (2), (3) можно моделировать широкий класс реальных помех и командных сигналов. Например, это могут быть произвольные линейные комбинации конечных импульсов, полиномиальных функций времени, затухающих и нарастающих синусоидальных сигналов, нарастающих и затухающих экспонент и т. д., причем коэффициенты в этих линейных комбинациях могут меняться скачками в произвольные моменты времени.

Необходимо выбрать управление $u(t)$ так, чтобы выход объекта $y(t)$ точно и безынерционно следил за каждым командным сигналом $y_k(t)$, который может появиться на выходе системы (2) при наличии любой неизмеряемой помехи $w(t)$, генерируемой системой (3). Кроме того, управление $u(t)$ должно быть физически реализуемо в виде обратной связи по выходу, т. е. $u(t) = u(y(t), y_k(t))$.

Решение этой задачи будет основано на чисто алгебраических соображениях. Начнем с простейшего «идеального» случая. Будем считать, что состояния систем (1), (2), (3)

доступны для прямого измерения. Тогда вся информация, необходимая для предсказания поведения объекта в будущем, имеется, и с помощью линейной стационарной обратной связи по состоянию мы можем обеспечить произвольно хорошую динамику слежения за командным сигналом. Пусть управление, решающее задачу в этом идеальном случае, состоит из двух слагаемых

$$u(t) = u_n(t) + u_k(t), \quad (4)$$

где $u_n(t)$ обеспечивает компенсацию влияния помехи $w(t)$ на объект, а $u_k(t)$ обеспечивает слежение за командным сигналом $u_k(t)$ в предположении, что помеха отсутствует. Начнем с вычисления управления $u_n(t)$.

Точная компенсация помехи. Подставим управление (4) в уравнения объекта (1) и, воспользовавшись формулой Коши и подставляя $w(t) = Hz(t)$, выйдем явное выражение для выхода $y(t)$:

$$y(t; x_0, t_0, z(t)) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu_k(\tau) d\tau + \\ + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}[Bu_n(\tau) + FH z(\tau)] d\tau. \quad (5)$$

Чтобы выход $y(t)$ не зависел от помехи $w(t)$, необходимо и достаточно, чтобы последний член справа был тождественным нулем. Сформулируем этот результат.

Т е о р е м а 1. Действие возмущения $w(t)$ на выход объекта (1) $y(t)$ будет полностью исключено тогда и только тогда, когда найдется постоянная матрица Λ такая, что

$$Ce^{A(t-\tau)}[B\Lambda + FH] = 0 \text{ при всех } t_0 \leq \tau, t \leq \infty. \quad (6)$$

Соответствующее управление имеет вид $u_n(t) = \Lambda z(t)$. $\odot$

Условие (6), очевидно, эквивалентно следующему (см. § 20):

$$C[\hat{B}, A\hat{B}, A^2\hat{B}, \dots, A^{n-1}\hat{B}] = 0, \hat{B} = B\Lambda + FH, \quad (7)$$

которое в свою очередь влечет за собой систему равенств

$$CA^s[B\Lambda + FH] = 0 \text{ при } s = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Если ввести в рассмотрение матрицу

$$W = [C', A'C', (A^2)'C', \dots, (A^{n-1})'C'],$$

ранг которой равен n в силу идентифицируемости пары матриц $\{A, C\}$, то условие (7) можно записать в виде

$$\text{rank } [W', B, FH] = \text{rank } [W', B].$$

Если это условие выполнено, то соответствующая матрица Λ может быть вычислена. Наиболее общая формула для Λ имеет вид [64]

$$\Lambda = -(W'B)^+ W'FH + [E - (W'B)^+ W'B]Q_\Lambda,$$

где через $(\cdot)^+$ обозначена псевдообратная матрица, Q_Λ — произвольная параметрическая матрица, E — единичная матрица.

Точная компенсация помехи с помощью управления $u_n(t) = \Lambda z(t)$ возможна даже в том случае, если помеха — разрывная функция, когда точно известно «состояние» процесса помехи $z(t)$. Это условие соответствует случаю точного измерения сигнала помехи.

Идеальное управление $u_n(t)$ является, конечно, физически не реализуемым из-за отсутствия данных о состоянии $z(t)$. Далее мы построим оценку для этого состояния с помощью идентификатора, а пока продолжим изучение «идеального» случая.

Слежение за командным сигналом. Предположим, что выбрано идеальное управление $u_n(t) = \Lambda z(t)$. Тогда уравнения движения (1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_n(t) + \hat{B}z(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\hat{B} = BA + FH$. Заметим, что в соответствии с выбором $u_n(t)$ член $\hat{B}z(t)$ не влияет на выход системы. Теперь задача состоит в том, чтобы выбрать управление $u_n(t)$ так, чтобы обеспечить точное слежение за каждым сигналом $u_n(t)$, который появляется на выходе системы (2). Установим сначала необходимое условие точного слежения.

Теорема 2. Для теоретически точного слежения выхода системы (8) $y(t)$ за командным сигналом $u_n(t)$, генерируемым системой (2), необходимо, чтобы существовала матрица Θ (возможно, не единственная) такая, чтобы

$$G = C\Theta. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ошибку слежения $\varepsilon_y(t) = y_k(t) - y(t)$. Используя (2) и (8), получим

$$\varepsilon_y(t) = Gr(t) - Cx(t).$$

Заметим теперь, что v -вектор $g(t)$ («состояние» командного процесса), вообще говоря, совершенно произволен. Отсюда немедленно следует, что для того, чтобы $\varepsilon_y(t) = 0$ для *некоторого* $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица Θ такая, что $G = C\Theta$. Однако необходимо еще доказать, можно ли соответствующее $x(t)$ реализовать с помощью допустимого управления. Отсюда следует отсутствие достаточности в условии теоремы. $\odot$

Если командный сигнал появляется на выходе системы (2), начальные условия которой могут меняться скачкообразно, то ясно, что точное слежение за таким командным сигналом с помощью стационарной обратной связи, вообще говоря, неосуществимо. Положение здесь аналогично тому, какое мы имеем при решении задачи регулирования с помощью стационарной обратной связи. Однако по-прежнему, хотя мы и не можем обеспечить точное слежение, мы можем выбрать любую динамику стремления k к нулю ошибки слежения.

Предположим теперь, что матрица Θ выбрана в соответствии с равенством (9), и запишем ошибку слежения в виде

$$\varepsilon_y(t) = C[\Theta g(t) - x(t)].$$

Удобно ввести новую переменную $\xi(t)$, определенную равенством

$$\xi(t) = \Theta g(t) - x(t). \quad (10)$$

Тогда ошибка слежения может быть представлена в виде $\varepsilon_y(t) = C\xi(t)$. Теперь задача точного слежения за командным сигналом может быть представлена как задача выбора управления $u_k(t)$, которое обеспечивало бы быстрое стремление к нулю переменных $\xi(t)$ из любого начального состояния $\xi(t_0)$. Ясно, что, решив эту задачу, мы обеспечим быстрое стремление к нулю ошибки слежения $\varepsilon_y(t)$.

Дифференцируя (10) по времени и используя уравнения состояния для $g(t)$ (2) и для $x(t)$ (8), получим линейное дифференциальное уравнение относительно вектора

$\xi(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) - Bu_k(t) + (\Theta R - A\Theta)r(t) - \hat{B}z(t). \quad (11)$$

Это уравнение по структуре подобно уравнению объекта (1). Последние два члена в (11) играют роль внешних возмущений. Это наводит на мысль об использовании «идеального» управления, обеспечивающего компенсацию помехи, для построения управления $u_k(t)$.

Предположим, как и ранее, что состояния $r(t)$, $x(t)$ можно точно измерить и что идеальное управление $u_k(t)$ можно выбрать в виде стационарной обратной связи по состоянию

$$u_k(t) = K_1x(t) + K_2r(t), \quad (12)$$

где K_1 и K_2 — некоторые постоянные матрицы $m \times n$ и $m \times v$, которые предстоит выбрать на основе соображений о динамике идеальной следящей системы. Подставляя (12) в (11), получим

$$\dot{\xi}(t) = [A + BK_1]\xi(t) - Vr(t) - \hat{B}z(t), \quad (13)$$

где матрица V определена равенством

$$V = -\Theta R + A\Theta + B[K_1\Theta + K_2]. \quad (14)$$

Заметим, что в формуле (13) член $-\hat{B}z(t)$ не влияет на выход системы $y(t)$ согласно выбору управления $u_k(t)$, однако он может влиять на «состояние» $\xi(t)$. Задача слежения за сигналом $y_k(t)$ свелась теперь к выбору матриц K_1 и K_2 в (13) так, чтобы $C\xi(t) \rightarrow 0$ из любого начального состояния $\xi(t)$. Так как $\hat{B}z(t)$ на выход системы не влияет, то, используя теорему 1, потребуем, чтобы матрица V удовлетворяла тому же набору условий, что и матрица $\hat{B} = BA + FH$ в условиях этой теоремы. Объединяя эти результаты, получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Произвольное решение $\xi(t)$ системы (13) будет асимптотически стремиться к нулю независимо от $r(t)$ и $z(t)$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

а) матрица K_1 выбрана так, чтобы матрица $[A + BK_1]$ была бы устойчивой;

б) выбор матрицы K_2 обеспечивает выполнение равенства

$$Ce^{A(t-\tau)} [\Theta R - A\Theta - BK_1\Theta - BK_2] = 0 \quad (15)$$

при всех τ, t . $\odot$

Заметим, что для того чтобы выполнялось условие б) теоремы 3, необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица K_2 такая, что

$$BK_2 = V + \Theta R - A\Theta - BK_1\Theta \quad (16)$$

для некоторой матрицы V , которая удовлетворяет условию $Ce^{A(t-\tau)} V = 0$. Поэтому вычисление матрицы K_2 можно проводить в два этапа. Сначала выбрать матрицу V , удовлетворяющую условию (15), а затем вычислить K_2 по формуле (16). Заметим, что условие (15) выполнено тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два условия:

$$\text{rank } [B, V + \Theta R - A\Theta] = \text{rank } [B], \quad (17)$$

$$Ce^{A(t-\tau)} V = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad t_0 \leq t \leq \infty. \quad (18)$$

С точки зрения практической реализации вычислений полезно заметить, что условия (17) и (18) не зависят от выбора матрицы K_1 .

После выбора матриц K_1 и K_2 идеальное управление имеет вид

$$u(t) = \Lambda z(t) + K_1 x(t) + K_2 r(t).$$

Динамические свойства этой идеальной системы будут определяться выбором матриц K_1, K_2, Λ .

Физически реализуемая следящая система. Обратимся к задаче оценки состояний систем (1), (2), (3). Будем считать, что реально доступны для измерения лишь две величины: выход объекта $y(t)$ и командный сигнал $u_k(t)$. Как и ранее, при конструировании регулятора нулевого состояния (§ 27), покажем, что замена в идеальном случае векторов состояний $x(t), z(t), r(t)$ приемлемыми оценками $\hat{x}(t), \hat{z}(t), \hat{r}(t)$, получаемыми на выходе идентификаторов, использующих информацию только об измеримых величинах $y(t), u_k(t)$, позволяет сконструировать физически реализуемую следящую систему, динамические свойства которой можно выбирать по своему усмотрению. Для простоты будем использовать для оценки

состояния n -мерные идентификаторы (фильтры Калмана). Аналогичные результаты могут быть получены и при использовании идентификаторов Люенбергера.

Поскольку конструирование идентификаторов n -мерного порядка было подробно изучено в гл. V, мы здесь сразу выпишем уравнения идентификатора, на выходе которого будет оценка состояния объекта $\hat{\mathbf{x}}(t)$ и оценка «состояния» помехи $\hat{\mathbf{z}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + L_1 C & FH \\ \hline L_2 C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (19)$$

где матрицы A, B, C, D, F, H определены выше, $y(t)$ и $u(t)$ — соответственно действительный выход объекта и действительный вход в (1). Предположим, что матрицы L_1 и L_2 выбраны таким образом, что разность между значением $[\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)]$ и оценкой $[\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{z}}(t)]$ асимптотически стремится к нулю:

$$[\mathbf{e}_x(t), \mathbf{e}_z(t)]' - [\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)]' - [\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{z}}(t)]' \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Уравнения для ошибки оценки состояния имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_x(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + L_1 C & FH \\ \hline L_2 C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x(t) \\ \mathbf{e}_z(t) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

В силу того, что пары матриц $\{A, C\}$ и $\{D, H\}$ являются идентифицируемыми, можно выбрать соответствующие матрицы L_1 и L_2 так, чтобы обеспечить желаемую динамику стремления ошибки идентификации к нулю.

Построение физически реализуемого идентификатора «состояния» $\mathbf{r}(t)$ по измерениям $\mathbf{y}_k(t)$ можно осуществить по следующим формулам:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) = [R + NG] \hat{\mathbf{r}}(t) - N\mathbf{y}_k(t), \quad (21)$$

где R и G заданы в (2), а N — матрица, которая обеспечивает желаемый темп стремления ошибки к нулю и выбирается конструктором. Ошибка оценки $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{r}}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{e}}_r(t) = [R + NG] \mathbf{e}_r(t). \quad (22)$$

Поскольку пара $\{R, G\}$ идентифицируема, то выбор матрицы N можно всегда осуществить, если задаться динамикой стремления $e_r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы выписать уравнения физически реализуемой следящей системы. Для этого достаточно в формулах $u_n(t) = \Lambda z(t)$, $u_k(t) = K_1 x(t) + K_2 r(t)$ заменить $\{z(t), x(t), r(t)\}$ их оценками $\{\hat{z}(t), \hat{x}(t), \hat{r}(t)\}$ и получить физически реализуемое управление вида

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_n(t) + \hat{u}_k(t) = \Lambda \hat{z}(t) + K_1 \hat{x}(t) + K_2 \hat{r}(t). \quad (23)$$

Чтобы доказать, что это управление на самом деле позволяет отслеживать любой командный сигнал, появляющийся на выходе (2), в присутствии любого внешнего возмущения, генерируемого системой (3), мы рассмотрим динамическое поведение действительной ошибки слежения $e_y(t) = y_k(t) - y(t)$ при управлении (23). Для этой цели подставим управление (23) в уравнение (1) и, используя обозначения:

$$\hat{x}(t) = x(t) - e_x(t), \quad \hat{z}(t) = z(t) - e_z(t), \quad \hat{r}(t) = r(t) - e_r(t),$$

получим

$$\dot{x}(t) = [A + BK_1] x(t) + [BA + FH] z(t) + BK_2 r(t) + B[\Lambda e_x(t) - K_1 e_z(t) - K_2 e_r(t)]. \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает движение реального объекта при действии возмущения $w(t)$ и при управлении в виде обратной связи (23).

Рассмотрим теперь поведение переменной состояния $\xi(t)$, заданной равенством (10).

Уравнение для $\xi(t)$ с использованием (24) имеет вид

$$\dot{\xi}(t) = [A + BK_1] \xi(t) - Vr(t) - \hat{B}z(t) + B[K_1 e_x(t) - K_2 e_r(t) - \Lambda e_z(t)]. \quad (25)$$

Если матрицы K , K_2 , N в идентификаторах выбраны должным образом, то ошибки $e_x(t)$, $e_z(t)$, $e_r(t)$ будут стремиться к нулю, и поведение переменной $\xi(t)$ в промежутках между скачками в начальных условиях систем (2) и (3) будет определено уравнением

$$\dot{\xi}(t) = [A + BK_1] \xi(t) - Vr(t) - \hat{B}z(t),$$

которое в точности совпадает с уравнением (13). Поэтому, если выполнены условия теоремы 3, то ошибка слежения будет приближаться к нулю асимптотически, и значит, система будет обеспечивать высокоточное слежение за командным сигналом при любой помехе. Структура получаемой следящей системы представлена на рис. 31.1. Основными элементами этой системы являются идентификатор командного сигнала и идентификатор помехи и состояния объекта.

Пример. Рассмотрим подробно простой пример конструирования линейной системы. Пусть дан объект 2-го порядка

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (26)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

где $y(t)$, $u(t)$, $w(t)$ — скаляры. Допустим далее, что помеха $w(t)$ исследована экспериментально и что она состоит из временных интервалов, на которых помеха равна неизвестной постоянной, и интервалов, на которых она равна линейной функции времени с неизвестным углом наклона. Общая формула такой помехи имеет вид

$$w(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t, \quad (27)$$

где α_1 , α_2 — неизвестные постоянные, которые могут скачком меняться совершенно произвольным образом. Ранее мы видели (см., например, § 10), что сигнал $w(t)$ такого вида появляется на выходе динамической системы, состоящей из двух интеграторов. Поэтому в качестве фиктивной динамической системы, генерирующей сигнал помехи, примем уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$w(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0].$$

Пусть, далее, командный сигнал имеет вид

$$u_k(t) = \gamma_1 + \gamma_2 t, \quad (29)$$

где γ_1 , γ_2 — неизвестные постоянные, которые могут меняться скачкообразно в произвольные моменты времени.

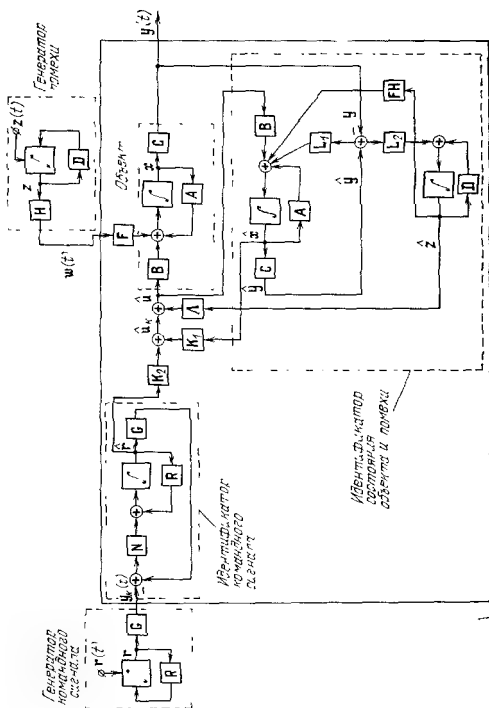


Рис. 31.1

Таким образом, сигнал помехи $w(t)$ может, вообще говоря, в точности совпадать с командным сигналом $u_k(t)$. Будем считать, что фиктивная динамическая система, генерирующая сигнал (29), совпадает с системой (28), так что $R = D$, а $G = H$.

Задача состоит в конструировании управляющего устройства в виде обратной связи такого, чтобы выход объекта (26) точно отслеживал любой командный сигнал $u_k(t)$ вида (29). Кроме того, система должна удовлетворительно работать при любой помехе $w(t)$ вида (27).

Начнем с выбора матрицы Λ , удовлетворяющей условиям теоремы 1. Необходимо проверить условие (7), которое имеет вид

$$[1 \ 0] [\hat{B} \ A\hat{B}] = 0, \quad (30)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Lambda + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0]$$

и Λ — искомая матрица. Нетрудно видеть, что условию (30) можно удовлетворить, если, например, выбрать $\Lambda = -[1 \ 0]$. При этом выборе имеем $\hat{B} = 0$, и управление $u_n(t)$, обеспечивающее инвариантность выхода по отношению к помехе, имеет вид

$$u_n(t) = -[1 \ 0] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = -z_1(t),$$

где $z_1(t), z_2(t)$ — переменные «состояния» помехи. Следующий шаг заключается в выборе матрицы Θ , удовлетворяющей условию теоремы 2. Для нашего примера уравнение для Θ имеет вид

$$[1 \ 0] = [1 \ 0]\Theta.$$

Ясно, что выбор $\Theta = 1$ является удовлетворительным. Теперь необходимо выбрать матрицу K_1 так, чтобы переменная $\xi(t) \rightarrow 0$, где $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 + k_{11} & -1 + k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}.$$

Необходимо выбрать k_{11}, k_{12} так, чтобы все решения этой системы стремились к нулю. Например, можно выбрать величины k_{11} и k_{12} так, чтобы оба собственных значения

матрицы системы были бы отрицательны и достаточно велики по модулю. По заданным значениям характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2 = -10$ находим: $k_{11} = -91$, $k_{12} = -19$. Чтобы выбрать матрицу K_2 , удовлетворяющую второй части теоремы 3, необходимо сначала подобрать матрицу V , которая удовлетворяла бы условию (17)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Это равенство можно удовлетворить выбором $V = 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае выполнено и равенство (18). Теперь матрицу K_2 можно непосредственно вычислить, используя уравнение (16). Эта матрица определена однозначно, если выбраны матрицы K_1, Θ, V . Обозначим $K_2 = [k_{21} \ k_{22}]$, тогда вычисление по формуле (16) дает $k_{21} = 100$, $k_{22} = 20$. Теперь можно выписать управление $u_k(t)$, отвечающее за точное слежение за командным сигналом:

$$\begin{aligned} \hat{u}_k(t) &= K_1 \hat{x}(t) + K_2 \hat{r}(t) - \\ &= -91\hat{x}_1(t) - 19\hat{x}_2(t) + 100\hat{r}_1(t) + 20\hat{r}_2(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Займемся теперь выбором динамики идентификаторов состояния. Сначала сконструируем идентификатор для оценки состояний $x(t), z(t)$. Согласно (20) уравнения для ошибок этой идентификации имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{x_1}(t) \\ \dot{e}_{x_2}(t) \\ \dot{e}_{z_1}(t) \\ \dot{e}_{z_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ \hline l_{21} \\ l_{22} \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} e_{x_1}(t) \\ e_{x_2}(t) \\ \hline e_{z_1}(t) \\ e_{z_2}(t) \end{bmatrix}$$

или

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} l_{11} & 1 & 0 & 0 \\ l_{12} - 9 & -1 & 1 & 0 \\ \hline l_{21} & 0 & 0 & 1 \\ l_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t). \quad (32)$$

Необходимо выбрать коэффициенты $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$ так, чтобы $e(t) \rightarrow 0$ с желаемой динамикой. Это означает, что собственные числа матрицы должны иметь отрицательные

вещественные части. Вычисление характеристического многочлена матрицы в (32) дает

$$\lambda^4 + (1 - l_{11})\lambda^3 + (9 - l_{12} - 1 \cdot l_{11})\lambda^2 - l_{21}\lambda - l_{22} = 0.$$

Назначая корни этого многочлена, можно сразу выбрать соответствующие этим корням коэффициенты l_{11} , l_{12} , l_{21} , l_{22} . Выпишем общий вид уравнений идентификатора для состояния $[x(t), z(t)]$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{z}}_1(t) \\ \dot{\hat{z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 1 & 0 & 0 \\ l_{12} - 9 & -1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 0 & 0 & 1 \\ l_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{z}_1(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{21} \\ l_{22} \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (33)$$

Для завершения конструирования осталось выбрать идентификатор для командного сигнала. Пусть матрица в уравнении (22) имеет вид

$$\begin{bmatrix} n_1 & 1 \\ n_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристический полином $\lambda^2 - n_1\lambda - n_2 = 0$. Если оба корня равны некоторому отрицательному числу h , то имеем $n_1 = 2h$, $n_2 = -h^2$.

Уравнение идентификатора командного сигнала имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{r}}_1(t) \\ \dot{\hat{r}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h & 1 \\ -h^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_1(t) \\ \hat{r}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2h \\ -h^2 \end{bmatrix} y_k(t). \quad (34)$$

Это завершает выбор управляющего устройства для данной следящей системы. Осталось выписать уравнение для физически реализуемого управляющего сигнала

$$\hat{u}(t) = -\hat{z}_1(t) - 9\hat{x}_1(t) - 19\hat{x}_2(t) + 100\hat{r}_1(t) + 20\hat{r}_2(t),$$

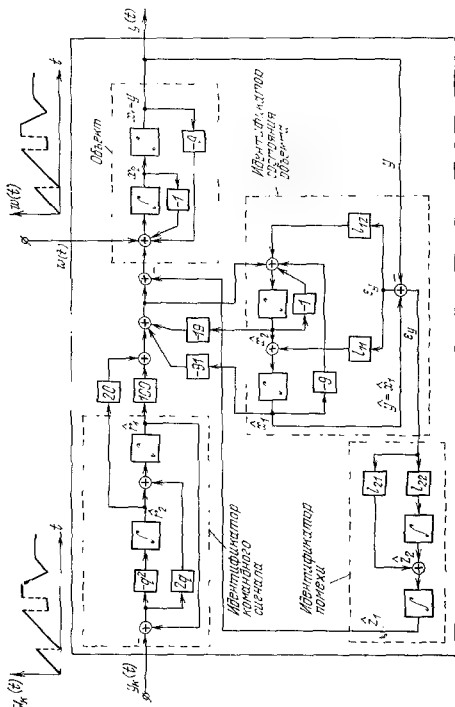


Рис. 31.2.

где оценки $\hat{z}_1(t)$, $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$ получим на выходе идентификатора (33), а оценки $\hat{r}_1(t)$, $\hat{r}_2(t)$ — на выходе идентификатора (34).

Блок-схема всей следящей системы представлена на рис. 31.2. Эта следящая система успешно решает задачу даже в том случае, когда командный сигнал в точности совпадает с сигналом помехи!

Задача. Скоonstrуируйте следящую систему для полностью управляемого и полностью идентифицируемого объекта, заданного матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Командный сигнал:

$$y_k(t) = \begin{bmatrix} t^2 + at + b \\ t^2 + ct + d \end{bmatrix}.$$

Сигнал помехи:

$$w(t) = \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix}.$$

Параметры a , b , c , d — произвольные постоянные, скачкообразно изменяющиеся во времени.

Г Л А В А VII

КВАДРАТИЧНЫЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА

Решая задачу конструирования регулятора, мы принимали во внимание лишь требование устойчивости замкнутой системы регулирования. Поэтому параметры регулятора были подчинены некоторым неравенствам, обеспечивающим расположение всех полюсов замкнутой системы в плоскости $\operatorname{Re} s < 0$. Если потребовать, чтобы переходный процесс в системе был наилучшим в каком-то строго определенном смысле, то параметры регулятора можно выбрать однозначно из условия минимума заданного критерия качества.

Задачей управления с квадратичным критерием качества или задачей наименьших квадратов будем называть задачу, для которой заданы:

1. Квадратичный критерий качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{u'(t) R(t) u(t) + x'(t) L(t) x(t)\} dt + x'(t_1) Q x(t_1).$$

2. Уравнение движения

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) x(t) + B(t) u(t), \\ y(t) &= C(t) x(t), \quad x(t_0) = x_0.\end{aligned}$$

3. Множество, которому должно принадлежать состояние $x(t_1)$, и требуется найти управляющую функцию $u(t)$, определенную на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, которая удовлетворяет условиям 2, 3 и минимизирует J . Без потери общности матрицы Q , R и L считаем симметричными.

Сформулированная задача является вариационной и легко может быть решена методом принципа максимума Понтрягина или с помощью динамического программиро-

вания Беллмана. Однако привлекательно получить ее решение элементарными методами, используя линейность уравнений движения и элементарные свойства квадратичных форм. Оказывается, это можно сделать, если взять в качестве класса управляющих функций Ω пространство $C^m[t_0, t_1]$ непрерывных функций. При решении задачи мы получим явное выражение для потерь, возникающих при замене оптимального управления на любое другое управление. Мы также автоматически получаем условия, при которых задача имеет решения.

Будем различать два вида решений сформулированной задачи. Если мы определяем оптимальное управление $u(t)$ как функцию A, B, L, Q, x_0, t и множества, которому должно принадлежать $x(t_1)$, но не как функцию текущего состояния $x(t)$, тогда мы говорим об управлении по разомкнутому контуру, или просто о разомкнутом управлении. В том случае, когда управление выражается как линейная функция оптимальной траектории $x(t)$, т. е. $u(t) = -K(t)x(t)$, то говорится, что управление представлено в виде обратной связи (управление по замкнутому контуру).

Такое различие никогда не возникает в задачах классического вариационного исчисления. В теории управляемых систем такое различие крайне важно, поскольку разомкнутые и замкнутые системы оптимального управления по-разному ведут себя в присутствии помех и изменяются эти системы в совершенно различных случаях.

Задачи с квадратичным критерием качества относятся к таким задачам управления, решение которых может быть получено в замкнутой форме. Это обстоятельство имеет основополагающее значение при конструировании практических систем управления. Ограниченность формулировки задачи, связанная с отсутствием ограничений на управление и на траекторию движения, может быть снята с помощью выбора весовых функций (матрицы Q, L, R) в формулировке критерия качества.

Кроме того, получаемый при решении задачи с квадратичным критерием оптимальный закон управления является линейным законом и, следовательно, легко реализуется на практике.

При решении задач этой главы везде предполагается, что состояние системы либо ее выход доступны для

измерения; если это условие не выполняется, то дополнительно к оптимальному регулятору необходимо конструировать идентификаторы состояния для получения приемлемой оценки вектора состояния.

§ 32. Минимизация в евклидовых пространствах

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы привести алгебраические аналоги задач управления с квадратичным критерием качества. Такими аналогами могут служить рассматриваемые ниже задачи минимизации в пространствах со скалярным произведением. Перед чтением этого параграфа советуем читателю еще раз прочесть § 8.

Минимальная длина вектора, принадлежащего заданной гиперплоскости. Рассмотрим уравнение гиперплоскости в евклидовом пространстве $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \alpha$, где $\mathbf{b}$ — некоторый фиксированный вектор, а α — вещественное число. Поставим задачу о выборе вектора $\mathbf{x}$, лежащего в данной гиперплоскости и имеющего минимальную длину (норму) $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \min$. Для решения этой задачи воспользуемся неравенством Коши — Буняковского

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \quad (\text{КБ})$$

Напомним, что равенство в (КБ) достигается тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ линейно зависимы (см. теорему 9 § 8). Решение задачи о векторе минимальной длины заключается в том, чтобы выбрать $\mathbf{x}$ пропорциональным вектору $\mathbf{b}$, а константу пропорциональности подобрать из условия $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \alpha$. Следующая теорема формулирует этот результат.

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathbf{b} \neq 0$ — фиксированный вектор в абстрактном евклидовом пространстве и пусть α — данный скаляр. Тогда значение $\mathbf{x}$, которое минимизирует $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ при ограничении $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = \alpha$, равно

$$\mathbf{x}_0 = \alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{-1} \mathbf{b}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что $\mathbf{x}_0$ лежит в данной гиперплоскости. Действительно,

$$\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{b} \rangle = \langle \alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \alpha \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{-1} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \alpha.$$

Покажем теперь, что любой другой вектор $\mathbf{x}$ из этой ги-

перпендикулярности имеет большую норму. Если $\langle x, b \rangle = \alpha$, тогда

$$\langle x, b \rangle - \langle x_0, b \rangle = 0, \text{ или } \langle x - x_0, b \rangle = 0.$$

Умножая это равенство на $\alpha \langle b, b \rangle^{-1}$, получим

$$\langle x, x_0 \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle = 0, \quad (1)$$

вместе с тем по определению скалярного произведения имеет место неравенство

$$0 \leq \langle x_0 - x, x_0 - x \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle - 2\langle x_0, x \rangle + \langle x, x \rangle.$$

Используя равенство (1), получим $\langle x, x \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle \geq 0$, т. е. норма вектора x больше нормы выбранного вектора x_0 . $\odot$

Эта задача важна в геометрии, так как ее решение дает метод определения минимального расстояния между точкой и плоскостью, не содержащей этой точки.

Минимальная норма решения линейной системы. Если X — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, а Y — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$, то для линейного преобразования $L: X \rightarrow Y$ определено сопряженное преобразование $L^*: Y \rightarrow X$. Напомним, что L^* называется сопряженным к L , если для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено равенство

$$\langle y, L(x) \rangle_y = \langle L^*(y), x \rangle_x.$$

Снова подчеркнем, что пространства X и Y могут быть совершенно различными. Например, одно из них может быть конечномерным, а другое — бесконечномерным.

Следующая теорема обобщает теорему 1 и является весьма полезной для наших целей.

Теорема 2. Если $L: X \rightarrow Y$ — линейное преобразование из евклидова пространства X в конечномерное евклидово пространство Y и если произведение преобразований $LL^*: Y \rightarrow Y$ является обратимым, то уравнение $L(x) = y_0$ имеет решение

$$x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0).$$

Более того, если x_1 — какое-нибудь другое решение уравнения $L(x) = y_0$, то справедливо неравенство

$$\langle x_1, x_1 \rangle \geq \langle x_0, x_0 \rangle.$$

Доказательство. Пусть $LL^*(y_1) = y_0$. Тогда y_1 существует, так как матрица LL^* обратима. Тогда $x_0 = L^*(y_1)$. Ясно, что вектор x_0 удовлетворяет исходному уравнению

$$Lx_0 = LL^*(L^*)^{-1}y_0 = y_0.$$

Если x_1 какое-либо другое решение, то $L(x_1) - L(x_0) = 0$, и поэтому

$$\langle y_1, L(x_0) \rangle = \langle L^*(y_1), x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle,$$

$$\langle y_1, L(x_1) \rangle = \langle L^*(y_1), x_1 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle.$$

Отсюда немедленно имеем $\langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$. Воспользовавшись этим равенством, получим требуемое утверждение

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x_1 - x_0, x_1 - x_0 \rangle = \\ &= \langle x_1, x_1 \rangle - 2\langle x_1, x_0 \rangle + \langle x_0, x_0 \rangle = \\ &= \langle x_1, x_1 \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle \geq 0. \odot \end{aligned}$$

В качестве мнемонического правила может быть полезна коммутативная диаграмма, представленная на

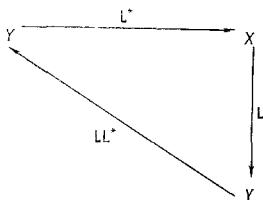


Рис. 32.1.

рис. 32.1. Смысл диаграммы в том, что хотя и нельзя прямо перейти из Y в X , потому что любой y имеет много прообразов в X , можно все-таки выбрать единственный прообраз, воспользовавшись условием минимума нормы. Этот выбор реализуется, как утверждает доказанная теорема, на пути из Y в X через преобразование LL^* .

Рассмотрим пример использования результата теоремы 2. Пусть $X = R^m$, $Y = R^n$. Тогда каждому линейному преобразованию $L: X \rightarrow Y$ соответствует $m \times n$ -матрица A этого преобразования, записанного относительно некоторых базисов, выбранных в пространствах X и Y . Пусть z — вектор пространства Y и A матрица $m \times n$

ранга m . Рассмотрим задачу отыскания n -вектора x такого, что $Ax = z$, а величина $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ минимальна. Сопряженному преобразованию L^* в этом случае соответствует транспонированная матрица A' . Поскольку матрица A имеет ранг m , то матрица AA' размеров $m \times m$ имеет обратную и согласно теореме 2 вектор $x_0 = A' (AA')^{-1}z$ является таким решением линейной системы $Ax = z$, которое имеет минимальную норму среди всех других решений этой системы.

Это решение линейной системы называют *псевдорешением*, а матрицу $A^+ = A' (AA')^{-1}$ — *псевдообратной матрицей* для матрицы A . Такое определение псевдообратной матрицы годится для прямоугольных матриц, ранг которых совпадает с числом строк или с числом столбцов. Если матрица A — квадратная и неособенная, то псевдообратная матрица совпадает с обратной. Более подробно со свойствами псевдообратных матриц можно познакомиться по книгам [10, 16].

Минимизация квадратичной формы на решениях линейной системы. Рассмотрим небольшое обобщение полученного результата. Пусть задана матрица $Q = N'N$. Найдем решение уравнения $Ax = z$, минимизирующее квадратичную форму $x'Qx$. Если $|N| \neq 0$ (это условие будет выполнено в том случае, если матрица Q положительно определена), то можно принять $Nx = y$ и тем самым свести задачу к предыдущей. Лучший x , обеспечивающий минимум квадратичной формы, вычисляется тогда по формуле

$$x_0 = Q^{-1}A' (AQ^{-1}A')^{-1}z.$$

В добавление к этим результатам, которые описывают минимизацию $\langle x, x \rangle$ при линейных ограничениях, имеется много интересных задач, где нужно минимизировать сумму квадратичной и линейной форм. Мы воспользуемся прямым методом для доказательства элементарного, но полезного результата.

Теорема 3. Если симметрическая матрица $Q = Q'$ положительно определена, то для всех x в R^n имеет место неравенство

$$\beta = x'Qx + 2r'x + b \geq b - r'Q^{-1}r,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_0 = -Q^{-1}r$.

Доказательство. Поскольку Q положительно определена, существует Q^{-1} . Прибавляя $r'Q^{-1}r$ к β и вычитая этот же член, получим полный квадрат

$$\beta - (x + Q^{-1}r)'Q(x + Q^{-1}r) + b - r'Q^{-1}r.$$

Так как Q положительно определена, то первое слагаемое справа имеет минимальное значение, равное нулю, и этот минимум достигается при $x = -Q^{-1}r$. $\odot$

В заключение заметим, что решение задачи, в которой требуется найти минимум $\langle x, x \rangle$ при ограничении

$$\langle x, Qx \rangle = 1,$$

было получено в § 8 (теорема 9). Согласно этой теореме максимальное значение $\langle x, x \rangle$ вычисляется по формуле

$$\max \langle x, x \rangle = [\lambda^-(Q)]^{-1},$$

а минимальное по формуле

$$\min \langle x, x \rangle = [\lambda^+(Q)]^{-1},$$

где $\lambda^+(Q)$, $\lambda^-(Q)$ — соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы Q .

Задачи. 1. Пусть Q — симметрическая неотрицательно определенная матрица. Показать, что существует минимум для

$$\eta - x'Qx + 2y'x + b.$$

если вектор y лежит в области значений Q и нет минимума в противном случае. Единственно ли минимальное значение x ?

2. Рассмотрим задачу нагрева стальных заготовок, проходящих через печь, разделенную на пять зон. Предположим, что стоимость нагрева в каждой зоне пропорциональна квадрату температуры зоны T_i , и предположим, что температура изделия T^* , выходящего из зоны, связана с температурой заготовки (изделия) при входе в зону T_0 и с температурой зоны T_i уравнением

$$T^* = T_0 + \frac{1}{2}(T_i - T_0).$$

Найдите значение температур зон T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 , минимизирующих стоимость нагрева, если начальная температура заготовки 10° , а конечная температура 1000° .

3. Пусть A — матрица $n \times m$. Предположим, что для всех матриц C размером $m \times m$ уравнение

$$A'Q + QA = C$$

можно решить. Найдите решение, для которого $\text{tr } Q'Q$ минимален.

4. Линейная система уравнений в теореме 2 имеет решение, и задача заключается в выборе оптимального решения из множества имеющихся. Задача, дополняющая названную, заключается в выбо-

ре вектора x такого, чтобы величина $\|Ax - y\|$ была бы минимальна, когда система $Ax = y$ решений не имеет. Покажите, что если A имеет размер $m < n$ и ранг m , то выбор $x_0 = (A'A)^{-1}A'y$ минимизирует $\|Ax - y\|$.

5. Дан набор n пар $\{x_i, t_i\}$. Найдите функцию $f(t) = \alpha t + \beta$ (α и β — постоянные, которые следует определить), такую, чтобы

$\sum_{i=1}^n [f(t_i) - x_i]^2$ было минимально (см. задачу 4).

6. Минимизировать $x'Qx + B'x$ при ограничении $Cx = 0$, когда C — матрица $m \times n$ ранга m .

§ 33. Задачи со свободным конечным состоянием системы

Будем различать два типа задач.

Задача без ограничений на конечное состояние системы и задача с фиксированным конечным состоянием. Первая задача немного проще, и решение ее будет получено в этом параграфе. Сразу следует оговориться, что под «решением» подразумевается возможность вычисления оптимальных траекторий и оптимальных управлений в терминах решений некоторых нелинейных матричных дифференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы только в частных случаях. Однако даже в таком виде приводимые результаты играют центральную роль в теории управляемых систем, так как они позволяют получить представление о структуре оптимальной системы. А если нужны конкретные числа, то расчеты легко осуществляются на ЭВМ.

Уравнение Риккати. Итак, пусть задача наименьших квадратов характеризуется свободным правым концом траектории и функционалом качества вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x'(t) L(t) x(t) + u'(t) u(t)] dt + x'(t_1) Q x(t_1).$$

Мы предположим, что матрица L симметрическая, но не обязательно положительно определена, хотя эти требования и выполняются в большинстве практически интересных случаев.

Кроме того, будем предполагать, в отличие от общей постановки задачи, что в квадратичной форме относительно управляющих воздействий $u'(t) R(t) u(t)$ матрица

$R(t)$ совпадает с единичной матрицей E . Это несколько сократит наши выкладки, не нарушая общности рассуждений. Рассмотрение случая произвольной положительно определенной матрицы $R(t)$ мы оставляем читателю (см. также задачу 7). Поскольку $L(t)$ предполагается неотрицательно определенной, то, вообще говоря, не является верным утверждение о том, что существует минимум J . Оказывается, что определение условий существования минимума J и вычисление оптимального управления связано с решением матричного дифференциального уравнения 1-го порядка, называемого уравнением Риккати:

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + \\ + K(t)B(t)B'(t)K(t) - L(t). \quad (\text{УР})$$

Поскольку это уравнение — нелинейное, то не ясно, будет ли при заданном начальном условии $K(t_0) = K_0$ существовать его решение. Волею того, если даже решение существует для некоторого интервала времени, то оно может перестать существовать для большего временного интервала. Чтобы проиллюстрировать типичные трудности, возникающие при решении уравнения Риккати, рассмотрим простой пример скалярного уравнения 1-го порядка

$$\dot{k}(t) = k^2(t) + 1, \quad k(0) = 0.$$

Это, очевидно, уравнение Риккати. Разделяя переменные и интегрируя, получим $k(t) = \operatorname{tg} t$. Решение стремится к бесконечности при $t \rightarrow \pi/2$, и поэтому оно существует на интервале $0 \leq t \leq 1$ и не существует на интервале $0 \leq t \leq 2$. При рассмотрении двух теорем этого параграфа предполагается, что можно решить соответствующее уравнение Риккати и что решение не обращается в бесконечность на рассматриваемых интервалах. Через $K(t, K_1, t_1)$ обозначим такое решение уравнения Риккати (УР) в момент времени t , которое в момент t_1 удовлетворяет начальному условию $K(t_1) = K_1$.

Еще несколько предварительных замечаний об уравнении Риккати. В нашем изложении оно вводится несколько искусственно. Рассуждения строятся таким образом. Если имеется решение уравнения Риккати (УР), то можно сделать некоторые выводы о существовании и о виде решения интересующей нас оптимальной задачи.

Читателя не должно смущать отсутствие мотивировки введения этого уравнения. Она будет дана в дальнейшем вместе с результатами исследования некоторых свойств решений этого уравнения.

Задача о регуляторе нулевого состояния. Физическое содержание этой задачи заключается в том, что система с оптимальной обратной связью должна возвращаться в нуль из любого состояния, причем критерий качества вдоль любого такого движения системы должен достигать минимума. Решение этой задачи основано на следующем простом равенстве.

Л е м м а 1. Пусть A, B и $K \rightarrow K'$ заданы. Предположим, что $K(t)$ существует на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда для $x(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих уравнению $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} [u'(t), x'(t)] \left[\frac{0}{K(t)B(t)} : \frac{B'(t)K(t)}{\dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t)} \right] \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt - \\ - x'(t)K(t)x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x(t)$ — любая дифференцируемая траектория системы, а $K(t)$ — любая дифференцируемая матрица, то имеет место очевидное тождество

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [x'(t)K(t)x(t)] dt = x'(t)K(t)x(t) \Big|_{t_0}^{t_1},$$

или, более подробно,

$$\int_{t_0}^{t_1} [x'(t)\dot{K}(t)x(t) + \dot{x}'(t)K(t)x(t) + x'(t)K(t)\dot{x}(t)] dt - \\ - x'(t)K(t)x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Если в этом выражении подставить вместо $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}'(t)$ правую часть уравнений движения $A(t)x(t) + B(t)u(t)$ и $x'(t)A'(t) + u'(t)B'(t)$ соответственно, то получим утверждение леммы. ○

Решение задачи со свободным конечным состоянием системы сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть заданы матрицы $A(t)$, $B(t)$, $L(t) = L'(t)$ и $Q = Q'$. Предположим, что на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ существует решение $K(t)$ дифференциального уравнения (УР) с начальным условием $K(t_1) = Q$. Тогда существует управление $u(t)$, которое дает минимум критерию качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{x'(t) L(t) x(t) + u'(t) u(t)\} dt + x'(t_1) Q x(t_1)$$

для системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $x(t_0) = x_0$. Минимальное значение J равно $x'(t_0) K(t_0, Q, t_1) x(t_0)$. Минимизирующее управление в виде обратной связи имеет вид

$$u(t) = -B'(t)K(t, Q, t_1)x(t).$$

Минимизирующее управление по разомкнутому контуру

$$u(t) = -B'(t)K(t, Q, t_1)\Phi(t, t_0)x_0,$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица для уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B'(t)K(t, Q, t_1)]x(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем выражение для критерия J , прибавив к J тождество предыдущей леммы:

$$\begin{aligned} J = & \int_{t_0}^{t_1} [u'(t), x'(t)] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt + x'(t_1) Q x(t_1) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} [u'(t), x'(t)] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline K(t)B(t); \dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) \end{array} \right] \times \\ & \times \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt - x'(t) K(t) x(t) \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Здесь $K(t) = K(t, Q, t_1)$. Объединяя два интеграла в правой части этого равенства и воспользовавшись дифференциальным уравнением для $K(t)$, из которого следует, что

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) + L(t) = \\ = K(t)B(t)B'(t)K(t), \end{aligned}$$

получим равенство

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{u}'(t), \mathbf{x}'(t)] \left[\begin{array}{c|c} E & B'(t) K(t) \\ \hline K(t) B(t) & K(t) B(t) B'(t) K(t) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} dt + \\ + \mathbf{x}'(t_0) K(t_0) \mathbf{x}(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}(t) + B'(t) K(t) \mathbf{x}(t)\|^2 dt + \mathbf{x}'(t_0) K(t_0) \mathbf{x}(t_0).$$

Мы воспользовались начальным условием для уравнения Риккати, согласно которому $K(t_1) = K(t_1, Q, t_1) = Q$. То обстоятельство, что подынтегральное выражение представлено в виде квадрата нормы некоторого вектора, легко проверяется, если выполнить матричное умножение. Полученное выражение для J делает выбор оптимального управления очевидным. Действительно, поскольку подынтегральная функция неотрицательна, минимум J равен $\mathbf{x}'(t_0) K(t_0, Q, t_1) \mathbf{x}(t_0)$, и достигается этот минимум в том и только в том случае, когда интеграл равен нулю. Поэтому оптимальное управление дается формулой

$$\mathbf{u}(t) = -B'(t) K(t, Q, t_1) \mathbf{x}(t),$$

т. е. в виде обратной связи. Подставляя его в уравнение движения, получим уравнение для оптимальной траектории

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A(t) - B(t) B'(t) K(t, Q, t_1)] \mathbf{x}(t).$$

Если $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица этого уравнения, то оптимальное управление по разомкнутому контуру дается равенством

$$\mathbf{u}(t) = -B'(t) K(t, Q, t_1) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0). \odot$$

Полученный результат дает решение задачи синтеза оптимальной системы с обратной связью. Структурная схема системы представлена на рис. 33.1.

Решенная задача получила название *задачи о регуляторе нулевого состояния* [24]. Эта задача рассматривалась в § 27 с учетом лишь требования устойчивости замкнутой системы. Пользуясь теоремой 1, можно выбрать коэффициенты в цепи обратной связи так, чтобы обеспечить минимум квадратичному критерию качества.

Заметим, что если выбор коэффициентов в цепи обратной связи на основании «модальных» соображений, например, по заданным полюсам передаточной функции замкнутой системы, не является однозначным, то наличие квадратичного критерия оптимальности однозначно определяет все коэффициенты в цепи обратной связи. Имеется много интересных вопросов, связанных с сочетанием модального и оптимального подходов при конструировании

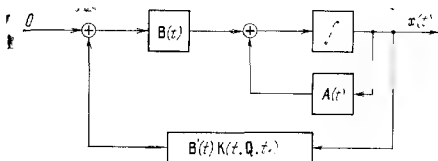


Рис. 33.1.

регуляторов. Например, можно решать задачу о выборе среди множества обратных связей, равноценных с модальной точки зрения, такой, которая обеспечивает минимум некоторому критерию качества. Возможны и другие сочетания этих подходов. Некоторые подробности имеются в книгах [47, 67, 80].

Пример 1. Пусть $x(0) = 1$. Найти $x(t)$ на интервале $0 \leq t \leq T$ так, чтобы критерий

$$J = \int_0^T \{\dot{x}^2(t) + x^2(t)\} dt$$

достигал минимума. Рассмотрим эту задачу как задачу оптимального управления. Пусть уравнение движения — $\dot{x}(t) = u(t)$. Тогда уравнение Риккати для этой задачи имеет вид

$$\dot{k}(t) = k^2(t) - 1.$$

Решение, которое проходит через нуль при $t = T$, имеет, очевидно, вид $k(t) = \text{th}(T - t)$. Поэтому оптимальная траектория удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = -\text{th}(T - t)x(t).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{ch} t - \left(\frac{\operatorname{sh} T}{\operatorname{ch} T} \right) \operatorname{sh} t, \\u(t) &= -\operatorname{th}(T-t)x(t).\end{aligned}$$

В соответствии с результатом теоремы минимум J равен

$$x'(0)K(0, 0, T)x(0) = x^2(0) \operatorname{th} T.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу предыдущего примера $\dot{x} = u$ для другого критерия качества:

$$J = \int_0^T u^2(t) dt + x^2(T).$$

Уравнение Риккати $\dot{k}(t) = k^2(t)$, $k(T) = 1$ имеет решение

$$k(t) = \frac{1}{T+1-t}.$$

Уравнение для оптимальной траектории

$$\dot{x}(t) = -k(t)x(t) = \frac{-x(t)}{T+1-t}, \quad x(0) = 1.$$

Его решение дается формулой $x(t) = 1 - \frac{t}{T+1}$. Оптимальное управление, выраженное в виде обратной связи, есть $u(t) = -B'(t)K(t, Q, t_1)x(t) =$

$$= -\frac{1}{T+1-t} \left(1 - \frac{t}{T+1} \right) = -\frac{1}{T+1},$$

а оптимальное управление по разомкнутому контуру, очевидно, совпадает с приведенным, так как $x_0 = 1$. Оптимальное движение системы в примерах 1, 2 иллюстрируется рис. 33.2.

З а м е ч а н и е. Таким образом, согласно теореме 1 для того, чтобы выбрать коэффициенты в цепи обратной связи, необходимо вычислить матрицу $K(t)$, решив уравнение (УР). Матрица $K(t)$ зависит только от матриц $A(t)$, $B(t)$, Q , $L(t)$ и не зависит от начального состояния системы. Поэтому оптимальная система с обратной связью может быть спроектирована при наличии только информации о структуре системы (матрицы $A(t)$, $B(t)$) и о критерии

качества (матрицы $Q, L(t)$). При этом над состоянием $x(t)$ производится линейное преобразование с помощью матрицы $B'(t)K(t, Q, t_1)$. Оптимальная система с обратной связью является, таким образом, линейной системой с переменными параметрами. Поскольку уравнение (УР)

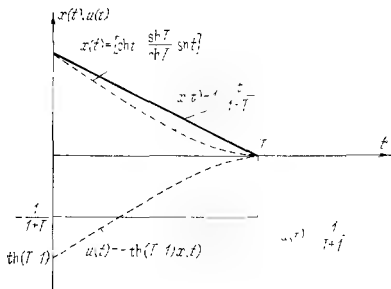


Рис. 33.2.

нелинейно, то найти его решение в замкнутой форме, как правило, невозможно, и вычисление $K(t)$ приходится осуществлять с помощью ЦВМ.

Явный вид решения уравнения Риккати. В специальном частном случае, когда $L = 0$ в определении критерия качества, решение уравнения Риккати выражается в явном виде через матрицу $W(t, t_1)$, которую мы называли грамианом управляемости (см. § 19). Итак, пусть $L = 0$. Тогда уравнение Риккати имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}(t) &= -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)B'(t)K(t), \\ K(t_1) &= Q. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если теперь предположить, что матрица $K(t)$ имеет обратную, то мы знаем, что справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} K^{-1}(t) = -K^{-1}(t) \dot{K}(t) K^{-1}(t).$$

Умножая теперь уравнение (1) справа и слева на матрицу $K^{-1}(t)$ и воспользовавшись этим соотношением, получим

$$\frac{d}{dt} K^{-1}(t) = K^{-1}(t) A'(t) + A(t) K^{-1}(t) - B(t) B'(t),$$

$$K^{-1}(t_1) = Q^{-1}.$$

Но согласно свойству 3 матрицы $W(t, t_1)$ (теорема 2 § 19), матрица $W(t, t_1)$ удовлетворяет точно такому же матричному дифференциальному уравнению. Поскольку это уравнение линейное, известно его решение (теорема 1 § 12), используя которое, немедленно получаем явный вид решения уравнения Риккати

$$K(t, Q, t_1) = [W(t, t_1) + \Phi(t, t_1) Q^{-1} \Phi'(t, t_1)]^{-1}.$$

Эта формула справедлива, естественно, лишь в предположении, что обратная матрица справа существует. Результаты проведенных вычислений можно выразить следующим образом.

Т е о р е м а 2. Пусть $A(t)$, $B(t)$ и $Q = Q'$ — данные матрицы и пусть $W(t, t_1)$ — матрица управляемости для системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Тогда, если матрица

$$H(t, t_1) = W(t, t_1) + \Phi(t, t_1) Q^{-1} \Phi'(t, t_1)$$

обратима для всех t в интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то существует управление, которое доставляет минимум критерию качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u'(t) u(t) dt + x'(t_1) Q x(t_1). \odot$$

Преобразование координат. Чтобы получить полную картину результатов при рассмотрении задач линейной теории, важно уметь исследовать эффекты, связанные с преобразованием координат в пространстве состояний исследуемой системы. Для задач с квадратичным критерием качества основные вопросы таковы. Как изменится уравнение Риккати при замене координат? В какой координатной системе это уравнение будет иметь простейшую форму?

Мы рассмотрим замену переменных $z(t) = P(t)x(t)$, предполагая, что $P(t)$ несингулярна, т. е. $|P(t)| \neq 0$ ни в одной точке интервала $t_0 \leq t \leq t_1$, кроме того, предположим, что $P(t)$ является дифференцируемой.

При такой замене переменной, как было показано в § 10 (теорема 2), уравнения системы, приведенные в условии теоремы 2, преобразуются к виду

$$\dot{z}(t) = [P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)]z(t) + P(t)B(t)u(t),$$

а критерий J примет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{u'(t)u(t) + z'(t)P^{-1}(t)L(t)P^{-1}(t)z(t)\} dt + \\ + z'(t_1)P^{-1}(t_1)QP^{-1}(t_1)z(t_1).$$

Из этих двух равенств непосредственно следует, что уравнение Риккати для новой системы преобразуется к виду

$$\dot{\tilde{K}}(t) = -[P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)]\tilde{K}(t) - \\ - \tilde{K}(t)[P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)] + \\ + \tilde{K}(t)P(t)B(t)B'(t)P'(t)\tilde{K}(t) - P^{-1}(t)L(t)P^{-1}(t).$$

Интересным частным случаем проведенного преобразования является $P(t) = \Phi(t_0, t)$, где Φ — переходная матрица исходной системы. Эта матрица, естественно, удовлетворяет требованиям, предъявляемым к $P(t)$. В этом частном случае линейные члены в уравнении Риккати исчезают, и оно преобразуется к виду

$$\dot{K}(t) = K(t)G(t)G'(t)K(t) - H'(t)H(t),$$

где $G(t) = \Phi(t_0, t)B(t)$, а $H(t)$ определена в условии теоремы 2.

Задача о регуляторе выхода. Иногда требуется оценивать качество переходного процесса не по отклонениям переменных состояния, а по отклонениям выходных переменных системы от заданного значения (обычно нулевого). При такой постановке задачи критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [y'(t)L(t)y(t) + u'(t)u(t)] dt + y'(t_1)Qy(t_1), \quad (2)$$

где $Q, L(t)$ — положительно полуопределенные матрицы размером $p \times p$. Задача с таким функционалом сводится к решенной задаче о регуляторе состояния в том случае, когда система является полностью наблюдаемой. Действительно, поскольку согласно уравнению наблюдения $y(t) = C(t)x(t)$, то функционал можно записать в виде

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x'(t)C'(t)L(t)C(t)x(t) + u'(t)u(t)] dt + \\ + x'(t_1)C'(t_1)QC(t_1)x(t_1).$$

Этот функционал совпадает с функционалом задачи о регуляторе состояния в том случае, когда матрицы $C'(t)L(t)C(t)$ и $C'(t_1)QC(t_1)$ положительно полуопределены. Следующее утверждение формулирует условия эквивалентности этих двух задач.

Л е м м а 2. Если пара матриц $\{A(t), C(t)\}$ наблюдаема, а матрицы $L(t), Q$ положительно полуопределены, то матрицы $C'(t)L(t)C(t), C'(t_1)QC(t_1)$ являются положительно полуопределенными матрицами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы имеем $y'(t)L(t)y(t) \geq 0$ при любом $y(t)$, откуда следует $x'(t)C'(t)L(t)C(t)x(t) \geq 0$ для любого вектора $y(t) = C(t)x(t)$. Но из условия наблюдаемости имеем однозначное соответствие между векторами $y(t)$ и $x(t)$, т. е. каждый выходной вектор $y(t)$ получается при единственном состоянии $x(t)$ и потому $x'(t)C'(t)L(t)C(t)x(t) \geq 0$ при любом $x(t)$, а следовательно, матрица $C'(t)L(t)C(t)$ положительно полуопределена. Аналогично устанавливается положительная полуопределенность матрицы $C'(t)QC(t)$. $\odot$

Теперь, пользуясь теоремой 1, сформулируем решение задачи о регуляторе выхода.

Т е о р е м а 3. Пусть система $\{A(t), B(t), C(t)\}$ наблюдаема и пусть $L(t), Q$ — положительно полуопределенные матрицы размеров $p \times p$. Тогда, если на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ существует решение $K(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + \\ + K(t)B(t)B'(t)K(t) - C'(t)L(t)C(t)$$

с граничным условием $K(t_1) = C'(t_1)QC(t_1)$, то оптимальное управление, минимизирующее функционал (2), имеет вид

$$u(t) = -B'(t)K(t, C'(t_1)QC(t_1), t_1)x(t).$$

Оптимальное движение определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B'(t)K(t, C'(t_1)QC(t_1), t_1)]x(t),$$

а минимальное значение критерия качества равно

$$J_0 = x'(t_0)K(t_0, C'(t_1)QC(t_1), t_1)x(t_0). \quad \odot$$

Заметим, что для построения обратной связи, решающей задачу о регуляторе выхода, нужна информация о состоянии системы $x(t)$. Данных о выходной величине $y(t)$ для решения этой задачи недостаточно. Однако, если система наблюдаема, то можно построить оценку состояния и реализовать оптимальное управление.

Задачи. 1. Рассмотрите минимизацию

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [u'(t), x'(t)] \begin{bmatrix} E & N(t) \\ N'(t) & L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$

для системы: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$. Покажите, что соответствующее уравнение Риккати имеет вид $\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) - L(t) + [N(t) + B'(t)K(t)]' [N(t) + B'(t)K(t)]$, и докажите аналог теоремы 1 для этих условий.

2. Покажите, что если $K(t)$ является решением стационарного уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -A'K(t) - K(t)A + K'(t)BB'K(t) - L,$$

то $e^{-A't}K(t, Q, t_1)e^{-At}$ удовлетворяет нестационарному уравнению Риккати

$$\dot{K}(t) = K(t)e^{At}BB'e^{A't}K(t) - e^{-A't}Le^{-At}.$$

3. Покажите, что существует начальное состояние $p(t_0)$ для системы уравнений $\dot{p}(t) = -A'(t)p(t)$ такое, что управление $u_0(t)$, которое минимизирует

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u'(t)u(t)dt + x'(t_1)Qx(t_1),$$

для уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ имеет вид $u_0(t) = -B(t)p(t)$.

4. Рассмотрим систему $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$. Предположим, что мы хотим обеспечить близость траектории этой системы к заданной траектории $x^*(t)$, где $x^*(t)$ является решением однородного уравнения $\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t)$. Чтобы решить эту задачу, определим критерий оптимальности в виде

$$J = \int_0^T \{u'(t)u(t) + [x(t) - x^*(t)]' L(t) [x(t) - x^*(t)]\} dt.$$

Покажите, что управление, минимизирующее эту функцию, имеет вид

$$u_0(t) = F(t)x(t) + g(t).$$

Чему равны $F(t)$ и $g(t)$?

5. Пусть A и B — постоянные матрицы и пусть

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Предположим, что A не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью (лежащих на мнимой оси). Покажите, что если K определено как

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} [W(0, t)]^{-1},$$

то $[A - BB'K]$ имеет все свои собственные числа в плоскости $\operatorname{Re} p < 0$.

6. Пусть дана система $\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t)$, $x(0) = 1$, $0 \leq t \leq 1$. Найдите оптимальное управление в виде цепи с обратной связью и в разомкнутом виде для критерия качества

$$J = x^2(1) + \int_0^1 u^2(t) dt.$$

7. Покажите, что если в формулировке теоремы 1 заменить член $u'(t)u(t)$ членом вида $u'(t)R(t)u(t)$, где $R(t)$ — положительно определенная матрица, то оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t).$$

8. Для уравнения $\dot{x}(t) = 0,5x(t) + u(t)$, $x(0) = x_0$ вычислите оптимальное управление в виде обратной связи, обеспечивающее минимум критерия

$$J = \int_0^1 [2e^{-t}u^2(t) + 0,5e^{-t}x^2(t)] dt.$$

Вычислите минимум J .

9. Для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1]$$

вычислите оптимальный закон управления для критерия

$$J = \int_0^1 [y^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Для оценки состояния системы постройте фильтр Калмана с собственными числами $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

10. В формулировке теоремы 1 нет требования управляемости пары $\{A(t), B(t)\}$. Каков физический смысл оптимального управления для неуправляемой системы?

§ 34. Терминальное управление

Если управляющее воздействие $u(t)$ должно обеспечить перевод системы в заданное состояние в конце интервала $t_0 \leq t \leq t_1$ или если требуется, чтобы в момент времени t_1 состояние $x(t_1)$ принадлежало бы заданному множеству, то соответствующая задача минимизации квадратичного критерия называется задачей с фиксированным конечным состоянием или терминальной задачей. Для решения этой задачи методы предыдущего параграфа должны быть модифицированы. Будем рассматривать лишь случай, когда конечное состояние является жестко фиксированным. Однако в рамках развитых методов возможны различные обобщения. Поскольку конечное состояние системы фиксировано, можно, не нарушая общности, положить $Q = 0$ в выражении для квадратичного критерия.

Минимум нормы терминального управления. Начнем с рассмотрения простейшего вида критерия, который получается, если $L = 0$:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u'(t) u(t) dt = \|u(t)\|^2.$$

Покажем, что управление, которое было получено нами при доказательстве управляемости линейной системы (вспомним, что это было одно из возможных управлений, обеспечивающих заданное движение системы), имеет минимальную норму.

Теорема 1. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ — заданные матрицы и пусть $W(t_0, t_1)$ — грамиан управляемости системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Если $u_0(t)$ — управление вида

$$u_0(t) = -B'(t)\Phi'(t_0, t)z,$$

где z удовлетворяет условию

$$W(t_0, t_1)z = x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1,$$

то управление $u_0(t)$ переводит систему из x_0 при $t = t_0$ в x_1 при $t = t_1$, причем, если $u_1(t)$ — какое-либо другое управление, удовлетворяющее этим граничным условиям, то

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1'(t) u_1(t) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} u_0'(t) u_0(t) dt.$$

Более того, если $W(t_0, t_1)$ имеет полный ранг (система полностью управляема), то

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0'(t) u_0(t) dt = [x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1]'W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1].$$

Доказательство. То, что управление $u_0(t)$ обеспечивает движение системы из x_0 при $t = t_0$ в x_1 при $t = t_1$, было установлено в § 19. Впрочем, легко проверить непосредственно, что выполняется равенство

$$x_1 - \Phi(t_1, t_0)\left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \sigma)B(\sigma)B'(\sigma)u_0(\sigma)d\sigma\right]. \quad (1)$$

Возьмем какое-либо управление $u_1(t)$, которое тоже удовлетворяет граничным условиям. Тогда

$$x_1 - \Phi(t_1, t_0)\left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \sigma)B(\sigma)u_1(\sigma)d\sigma\right]. \quad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим

$$-\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \sigma)B(\sigma)[u_1(\sigma) - u_0(\sigma)]d\sigma = 0.$$

Допножая это равенство слева на z' и вспоминая определение $u_0(t)$ по условию теоремы, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0'(\sigma)[u_1(\sigma) - u_0(\sigma)]d\sigma = 0.$$

Это условие позволяет проверить непосредственно, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \{u_0'(s) u_1(s) - u_1'(s) u_0(s)\} ds = \\ = \int_{t_0}^{t_1} [u_1(s) - u_0(s)]' [u_1(s) - u_0(s)] ds. \end{aligned}$$

Так как выражение справа неотрицательно, это завершает доказательство оптимальности $u_0(t)$.

Заметим, что в случае обратимости матрицы $W(t_0, t_1)$ (а это, естественно, более интересный случай) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} u_0'(t) u_0(t) dt &= z' \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s) B(s) B'(s) \Phi'(t_0, s) ds z = \\ &= z' W(t_0, t_1) z = \\ &= [x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1]' W^{-1}(t_0, t_1) [x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1]. \quad \odot \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку мы имеем явное выражение для квадрата нормы оптимального управления, то при заданном управлении, удовлетворяющем граничным условиям,

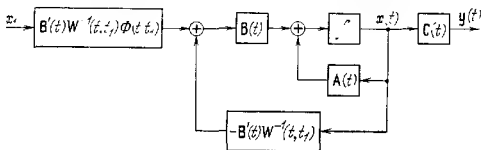


Рис. 34.1.

мы имеем явную формулу для величины, на которую левая часть неравенства

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1'(t) u_1(t) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} u_0'(t) u_0(t) dt$$

превосходит правую. Структура оптимальной системы дана на рис. 34.1.

Для доказательства теоремы 1 можно использовать результат теоремы 2 § 34. Этот подход помогает уяснить «геометрический смысл» полученного результата.

Чтобы сделать это, заметим, что задачу вычисления оптимального управления можно трактовать как задачу решения линейного интегрального уравнения

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \sigma) B(\sigma) u(\sigma) d\sigma = [\Phi(t_0, t_1) x_1 - x_0].$$

Здесь $L(u)$ определяет линейное преобразование евклидова бесконечномерного пространства m -ок непрерывных функций, которое мы обозначили $C_*^m[t_0, t_1]$, в линейное n -мерное евклидово пространство E^n , или

$$L(u): C_*^m[t_0, t_1] \rightarrow E^n.$$

Напомним, что скалярное произведение в E^n : $\langle x_1, x_2 \rangle = x_1' x_2$, а скалярное произведение в $C_*^m[t_0, t_1]$:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_{t_0}^{t_1} u_1'(\sigma) u_2(\sigma) d\sigma.$$

Заметим далее, что оператор L^* , сопряженный к L , имеет вид

$$L^*(x) = B'(t)\Phi'(t_0, t_1)x,$$

где $x \in E^n$, и поэтому преобразование LL^* просто равно

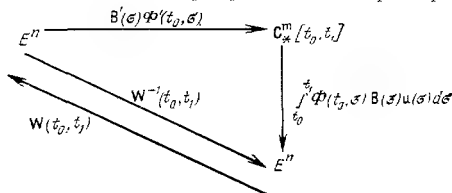


Рис. 34.2.

$W(t_0, t_1)$. Если эта матрица обратима, то в соответствии с теоремой 2 § 32 выбор

$$u_0(t) = -B'(t)\Phi'(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)$$

минимизирует $\langle u, u \rangle$ для $L(u) = x$. Приведенная на рис. 34.2 диаграмма иллюстрирует идею этого доказательства.

Рассмотрим простой пример использования доказанной теоремы. Пусть дана электрическая цепь (см. рис. 34.3). Уравнение движения этой системы

$$\frac{d}{dt} Cu(t) = i(t),$$

где C — емкость, $i(t)$ — ток в цепи, R — сопротивление. Энергия, рассеянная на сопротивлении в интервале $[0, t_1]$, равна

$$\eta = \int_0^{t_1} Ri^2(t) dt.$$

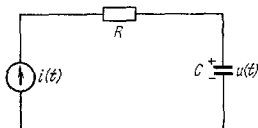


Рис. 34.3.

Пусть требуется найти $i(t)$ такое, чтобы $u(0) = u_0$, $u(t_1) = u_1$, а энергия, рассеянная на сопротивлении, была бы минимальной. Мы хотим минимизировать

$$J = \int_0^{t_1} i^2(t) dt.$$

Градиент управляемости в этой задаче имеет вид $W(0, t_1) = \frac{t_1}{C^2}$ и оптимальное движение в соответствии с результатом теоремы 1

$$i_0(t) = \frac{C}{t_1}(u_1 - u_0) = \text{const.}$$

Минимум рассеянной на сопротивлении энергии реализуется при постоянном токе. Если $u_0 = 0$, то простой расчет показывает, что отношение энергии, накопленной в цепи, к энергии, затраченной за время t_1 в оптимальном режиме, равно $1/(1 + 2RC/t_1)$. Это отношение минимизирует эффективность этой цепи как накопителя энергии.

Общий случай терминальной задачи. Последний шаг в решении задачи управления с квадратичным критерием качества состоит в решении терминальной задачи, когда L в критерии оптимальности отлична от нуля. Процедура решения состоит в комбинировании полученных ранее результатов.

Пусть уравнение движения системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

а критерий качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{u'(t)u(t) + x'(t)L(t)x(t)\} dt. \quad (3)$$

Решение задачи выбора оптимального $u(t)$ снова зависит от решения уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)B'(t)K(t) - L(t). \quad (УР)$$

Однако граничные условия в этом уравнении, как будет показано ниже, не являются теперь жестко фиксированными.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что существует симметрическая матрица K_1 такая, что решение $K(t, K_1, t_1)$ матричного уравнения Риккати существует на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда дифференцируемая траектория $x(t)$, определенная на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, минимизирует критерий качества (3) для дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ и граничных условий $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ тогда и только тогда, когда она минимизирует величину*

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} v'(t)v(t) dt,$$

для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B'(t)K(t, K_1, t_1)]x(t) + B(t)v(t)$$

и граничных условий $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$. Более того, вдоль любой траектории, удовлетворяющей граничным условиям, выполняется равенство

$$J = J_1 + x_0'K(t_0, K_1, t_1)x_0 - x'(t_1)K_1x(t_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если подставить уравнение $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ в равенство леммы 1 § 33,

то J приводится к виду

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{u}'(t), \mathbf{x}'(t)] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} dt - \\ + \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{u}'(t), \mathbf{x}'(t)] \left[\begin{array}{c|c} 0 & B'(t)K(t) \\ \hline K(t)B(t) & \dot{K}(t) + K(t)A(t) + A'(t)K(t) \end{array} \right] \times \\ \times \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} dt - \mathbf{x}'(t)K(t)\mathbf{x}(t) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Объединяя эти два интеграла и используя уравнение Риккати для $K(t)$, получим

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{u}'(t), \mathbf{x}'(t)] \left[\begin{array}{c|c} E & B'(t)K(t) \\ \hline K(t)B(t) & K(t)B(t)B'(t)K(t) \end{array} \right] \times \\ \times \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} dt + \mathbf{x}'(t_0)K(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}(t) + B'(t)K(t)\mathbf{x}(t)\|^2 dt + \mathbf{x}'(t_0)K(t_0)\mathbf{x}(t_0).$$

Полагая $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) + B'(t)K(t)\mathbf{x}(t)$, получим уравнение движения относительно переменных $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [A(t) - B(t)B'(t)K(t_0, K_1, t_1)]\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{v}(t)$$

и минимизируемый функционал вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}'(t)\mathbf{v}(t) dt + \mathbf{x}'(t_0)K(t_0, K_1, t_1)\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}'(t_1)K_1\mathbf{x}(t_1).$$

Этим завершается доказательство эквивалентности, требуемой условиями теоремы. $\odot$

Доказанная теорема (заметьте, что доказательство похоже на доказательство теоремы 1 § 33) сводит задачу с ненулевой матрицей $L(t)$ к эквивалентной задаче относительно управления $\mathbf{v}(t)$, критерий которой имеет нулевую матрицу $L(t)$. Эту эквивалентную задачу мы уже решили (теорема 1 этого параграфа). Формулы для вычисления оптимального управления оказываются довольно сложными.

Структурная схема оптимальной системы с обратной связью совпадает с той, которая была приведена при ре-

шении задачи со свободным конечным состоянием. Разница заключается в граничных условиях уравнения Риккати. Матрицу K_1 необходимо подобрать (в задаче со свободным конечным состоянием начальное условие уравнения Риккати было фиксировано и равно матрице Q , входящей в формулировку квадратичного критерия общего вида) так, чтобы траектория движения проходила в момент t_1 через заданную точку $x(t_1) = x_1$. Таким образом, матрица $K(t)$ коэффициентов усиления в цепи обратной связи будет существенно изменяться в зависимости от заданного значения x_1 . Поэтому для реализации такой системы придется решать уравнения Риккати каждый раз, как только изменились входные данные относительно величины x_1 . Этот существенный конструктивный недостаток связан с требованием точного попадания в точку x_1 . Если ввести стоимость отклонения от x_1 , т. е. $Q \neq 0$, в формулировку критерия качества, то матрица обратной связи не будет зависеть от величины x_1 .

Оптимальная следящая система. Задачи о регуляторе состояния и о регуляторе выхода являются частным случаем более общей задачи слежения. Мы рассмотрим задачу оптимального слежения выхода системы $y(t)$ за заданной входной функцией времени $z(t)$. Будем предполагать, что функция $z(t)$ известна при $t_0 \leq t \leq t_1$. Обозначим ошибку слежения $\Delta(t) = z(t) - y(t)$ и рассмотрим следующий критерий качества:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta'(t) L(t) \Delta(t) + u'(t) u(t)] dt + \Delta'(t) Q \Delta(t), \quad (4)$$

где $L(t)$, Q — положительно полуопределенные матрицы. Тогда решение задачи о минимизации этого функционала вдоль траектории движения линейной системы непосредственно следует из результатов § 32 и теоремы 2. Оставляем читателю доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. Для линейной наблюдаемой системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C(t)x(t)$$

управление в виде обратной связи, минимизирующее критерий качества (4), где $z(t)$ — заданная непрерывная функция, имеет вид

$$u(t) = B'(t) \{v(t) - K(t)x(t)\}.$$

Положительно определенная, симметрическая матрица $K(t)$ является решением уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) + K(t)B(t)B'(t)K(t) - C'(t)L(t)C(t)$$

с граничным условием

$$K(t_1) = C'(t_1)QC(t_1),$$

вектор $v(t)$ является решением уравнения

$$\dot{v}(t) = -[A(t) - B(t)B'(t)K(t)]v(t) - C'(t)L(t)z(t)$$

с граничным условием

$$v(t_1) = C'(t_1)Qz(t_1).$$

Оптимальная траектория есть решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B'(t)K(t)]x(t) + B(t)B'(t)v(t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. $\odot$

Заметим, что как уравнение Риккати, так и его начальные условия не зависят от желаемого выхода $z(t)$. Отсюда следует, что матрица обратной связи $K(t)$ полностью определяется заданием матриц системы, критерия стоимости и временным интервалом $[t_0, t_1]$. Заметим далее, что структура регулятора получается точно такая, как и в задаче о регуляторе выхода. Значит, собственные числа оптимальной следящей системы с обратной связью совпадают с собственными числами оптимальной системы, полученной при решении задачи о регуляторе выхода. Отличие оптимальной следящей системы от оптимального регулятора выхода состоит в наличии вектора $v(t)$. Важно помнить, что для вычисления текущего значения функции $v(t)$ необходимо знать функцию желаемого выхода $z(t)$ при всех $t_0 \leq t \leq t_1$. Это условие редко выполняется в реальных системах. Структурная схема оптимальной следящей системы приведена на рис. 34.4. Если желаемый выход принадлежит некоторому известному классу функций, например, является решением однородного уравнения $\dot{z}(t) = Az(t)$, то задачу слежения можно свести к задаче о регуляторе состояния, включив вектор $z(t)$ в общее число переменных состояния и сконструировав идентифика-

тор этого состояния. Напомним, что подобный подход был использован в § 25 при конструировании асимптотического дифференциатора. С этих позиций задача о следящей системе изучалась в § 31.

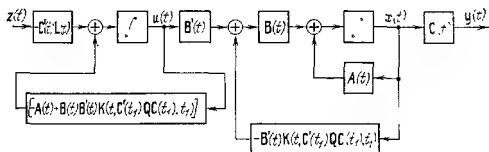


Рис. 34.4.

Задача 1. Определите, при каких условиях существует управление $u_0(t)$, которое переводит систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

из x_0 при t_0 в x_1 при t_1 и минимизирует

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \{u'(t)u(t) + 2u'(t)Nx(t) + x'(t)Lx(t)\} dt.$$

Предположите, что матрица управляемости $W(t_0, t_1)$ — положительно определенная матрица. Найдите управление, предполагая, что оно существует.

2. Пусть C — матрица $m \times n$ ранга m . Найдите $u(t)$ такое, что состояние системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0$$

попадает в ядро C при $t = 1$ и

$$J = \int_0^1 \{x'(t)L(t)x(t) + u'(t)u(t)\} dt$$

минимизируется.

3. Покажите, что существует начальное состояние для сопряженных уравнений

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t)$$

такое, что управление, которое минимизирует

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u'(t)u(t) dt$$

и переводит состояние системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ из x_0 при t_0 в x_1 при t_1 , имеет вид

$$u(t) = -B'(t)p(t).$$

4. Найдите минимальное значение $\int_0^{\pi} \dot{x}^2(t) dt$ при ограничениях

$$x(\pi) = 0, \quad \tau(0) = 1.$$

5. Пусть A — постоянная матрица $n \times n$ и b — постоянный n -вектор. Пусть пара $\{A, b\}$ управляема. Для заданной функции $\psi(t)$, определенной на интервале $0 \leq t \leq \sigma$, найдите x_0 такое, чтобы минимизировать интеграл

$$J = \int_0^{\sigma} [\psi(t) - be^{-A't}x_0]^2 dt.$$

6. Найдите функцию времени $u(t)$ такую, чтобы неустойчивая система $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$ переходила в нулевое состояние, а

$$J = \int_0^{\infty} u^4(t) dt$$

было минимальным. Найдите $u(t)$ в виде обратной связи, т. е. как функцию $x(t)$.

7. Пусть A — постоянная матрица $n \times n$, B — постоянная матрица $n \times m$. Пусть пара $\{A, B\}$ управляема. Дана известная функция времени $v(t)$. Найдите управление $u(t)$, которое переводит систему $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Cv(t)$ из x_0 в 0 за время T и минимизирует

$$J = \int_0^T u'(t)u(t) dt.$$

8. Найдите управление $u(t)$ и конечное время T такие, что скалярная система $\dot{x}(t) = u(t)$ переходит из $x(0) = 0$ в $x(T) = 1$ при минимуме (по $u(t)$ и по T , так как T не фиксировано) величины

$$J = \int_0^T u^2(t) dt + T.$$

9. Рассмотрите задачу попадания траектории $x(t)$, $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(0) = 1$ на линию $x = \alpha t - \alpha$ при минимуме

$$J = \int_0^{t_1} \{u^2(t) + x^2(t)\} dt,$$

t_1 — фиксировано.

10. Найдите управление, переводящее систему $\dot{x}(t) = b(t)u(t)$ из состояния $x(0) = 1$ в состояние $x(1) = 0$ и минимизирующее

$$J = \int_0^1 u^2 dt.$$

11. Найдите $u(t)$ такое, что скалярная система $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ переходит из $x = 1$ при $t = 0$ в $x = 0$ при $t = 1$ и

$$J = \int_0^{0,5} u^2(t) dt + 2 \int_{0,5}^1 u^2(t) dt$$

достигает минимума.

§ 35. Стационарные системы

При переходе к стационарному случаю полученные ранее результаты упрощаются и их легче интерпретировать. В стационарном случае решение уравнения Риккати может быть получено (по крайней мере, в принципе) в замкнутой форме. Оно сводится к вычислению матричных экспонент и взятию обратной матрицы. Заметим, что даже в случае стационарной системы оптимальный закон управления является нестационарным. Чтобы получить стационарный закон управления, необходимо рассмотреть поведение системы на полубесконечном интервале времени $0 \leq t \leq \infty$. Если система является управляемой и идентифицируемой, то оптимальный стационарный закон управления, вычисляемый как решение алгебраического нелинейного уравнения Риккати, существует и единствен. Более того, полученная оптимальная система является асимптотически устойчивой. Решение этой задачи о стационарном оптимальном регуляторе состояния используется при конструировании многих систем автоматического управления.

Алгебраическое уравнение Риккати. Начнем исследование стационарных объектов с изучения свойств алгебраического уравнения Риккати, решение которого дает оптимальный закон управления для стационарной системы с бесконечным временем существования. Сначала докажем один вспомогательный результат.

Л е м м а. Пусть система $\{A, B, C\}$ управляема и идентифицируема. Пусть, далее, K_1, K_2 таковы, что матрицы

$[A - BK_1] = A_1$ и $[A - BK_2] = A_2$ устойчивы. Тогда для решений уравнений

$$A_i'V + VA_i + K_i'K_i + C'C = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

обозначенных через V_1, V_2 , справедливы равенства

$$V_1 - V_2 = \int_0^\infty e^{[A-BK_1]t} W_1 e^{[A-BK_1]t} dt, \quad (2)$$

где $W_1 = [K_1 - K_2]' [K_1 - K_2] - [K_1 - K_2]' [B'V_2 - K_2] - [B'V_2 - K_2]' [K_1 - K_2]$,

$$V_1 - V_2 = \int_0^\infty e^{[A-BK_1]t} W_2 e^{[A-BK_2]t} dt, \quad (3)$$

где $W_2 = [K_1 - K_2]' [K_1 - K_2] - [K_1 - K_2]' [B'V_1 - K_2] - [B'V_1 - K_2]' [K_1 - K_2]$.

Доказательство. Так как матрицы A_1, A_2 устойчивы, то согласно теореме 5 § 12 решения V_1, V_2 уравнений (1) существуют и единственны, причем каждое из этих решений представимо в виде

$$V_i = \int_0^\infty e^{[A-BK_i]t} [K_i'K_i + C'C] e^{[A-BK_i]t} dt, \quad i = 1, 2.$$

Выпишем первое из уравнений (1)

$$[A - BK_1]'V_1 + V_1[A - BK_1] + K_1'K_1 + C'C = 0,$$

или, что то же самое,

$$[A - BK_1]'[V_1 - V_2] + [V_1 - V_2][A - BK_1] + K_1'K_1 + C'C + [A - BK_1]'V_2 + V_2[A - BK_1] = 0.$$

Из уравнения (1) при $i = 2$ имеем

$$A'V_2 + V_2A + C'C - K_2'B'V_2 + V_2BK_2 - K_2'K_2.$$

Подставляя это равенство в предыдущее, получим уравнение

$$[A - BK_1]'[V_1 - V_2] + [V_1 - V_2][A - BK_1] + W = 0,$$

где W имеет вид, указанный в условии леммы. Поскольку это — уравнение Ляпунова и матрица $[A - BK_1]$ устой-

чива, то его решение может быть представлено в виде интеграла (2) согласно теореме 5 § 12. Аналогично доказывается равенство (3). $\odot$

Теперь докажем существование решения алгебраического уравнения Риккати. Заметим, что точно так же, как в случае оценки квадратичного функционала в § 12, где при переходе к бесконечному временному интервалу матрица V удовлетворяет алгебраическому, а не дифференциальному уравнению, для оптимальной задачи матрица обратной связи при бесконечном времени существования системы удовлетворяет алгебраическому, а не дифференциальному уравнению Риккати.

Т е о р е м а 1. Если система $\{A, B, C\}$ управляема и идентифицируема, то существует симметрическая положительно определенная матрица V , которая является решением алгебраического уравнения Риккати

$$A'V + VA - VBB'V + C'C = 0. \quad (AP)$$

Доказательство основано на построении сходящейся последовательности положительно определенных функций $\{V_m\}$, $m = 1, 2, \dots$. Рассмотрим критерий качества

$$J = \int_0^{\infty} \{u'(t)u(t) + x'(t)C'Cx(t)\} dt.$$

Пусть V_0 — положительно определенное решение линейного алгебраического уравнения

$$[A - BK_0]'V + V[A - BK_0] + K_0'K_0 + C'C = 0,$$

где K_0 выбрана так, что $[A - BK_0]$ — устойчивая матрица. Примем $K_1 = B'V_0$ и найдем соответствующую матрицу V_1 как решение уравнения

$$[A - BB'V_0]'V + V[A - BB'V_0] + V_0BB'V_0 + C'C = 0.$$

Чтобы убедиться в том, что матрица V_1 существует и положительно определена, воспользуемся равенством леммы, которое после несложных преобразований, использующих определение V_0 и V_1 , примет вид

$$V_0 - V_1 = \int_0^{\infty} e^{[A - BK_0]t'} [K_0 - K_1]' [K_0 - K_1] e^{[A - BK_0]t} dt.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательно, имеем $V_0 - V_1 \geq 0$. Из равенства (3) в условии леммы следует, что матрица $[A - B'BV_0]$ устойчива. Повторяя эти рассуждения для $m = 1, 2, \dots$, получим неубывающую последовательность положительно определенных функций $V_0 \geq V_1 \geq V_2 \geq \dots \geq V_m \geq \dots$. Поскольку система полностью идентифицируема, то величина J строго положительна при любом $x_0 \neq 0$. Следовательно, не возрастающая скалярная последовательность $x_0'V_0x_0, x_0'V_1x_0, \dots, x_0'V_mx_0$, соответствующая построенной матричной последовательности $\{V_m\}$, ограничена снизу и поэтому согласно известной теореме анализа имеет конечный предел $\eta = \lim_{m \rightarrow \infty} x_0'V_mx_0$ при любом $x_0 \neq 0$. Покажем, что матричная последовательность V_m в этом случае тоже имеет предел $V_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m$. Действительно, так как скаляр

$$[1 \ 0 \ \dots \ 0] V_m [1 \ 0 \ \dots \ 0]'$$

имеет предел при $m \rightarrow \infty$, то v_{11} — элемент матрицы V_m — имеет предел. Аналогичное утверждение очевидно справедливо для любого v_{jj} -го элемента этой матрицы. Значит все диагональные элементы имеют предел. Пусть теперь x_0' имеет все элементы нулевыми, а i -ю и j -ю компоненты — равными единице, тогда

$$x_0' V_m x_0 = v_{ii}^m + v_{jj}^m + 2v_{ij}^m;$$

так как v_{ii}^m и v_{jj}^m имеют предел при $m \rightarrow \infty$, то существует предел и для v_{ij}^m при всех i, j . Таким образом, все элементы матрицы V_m при $m \rightarrow \infty$ имеют предел. Значит, существует $\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = V_\infty$.

Поскольку все матрицы построенной последовательности $\{V_m\}$ при любом $m = 1, 2, \dots$ удовлетворяют линейному алгебраическому уравнению

$$[A - BB'V_{m-1}]' V_m + V_m [A - BB'V_{m-1}] + C'C + V_{m-1}BB'V_{m-1} = 0,$$

предельная матрица V_∞ удовлетворяет уравнению (AP). Действительно, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ и замечая,

что $V'_\infty = V_\infty$, имеем

$$[A - BB'V_\infty]'V_\infty + V_\infty[A - BB'V_\infty] + C'C + V'_\infty BB'V_\infty = \\ = A'V_\infty + V_\infty A + C'C - V_\infty BB'V_\infty = 0. \odot$$

Сформулируем отдельно одно важное утверждение, доказанное нами при доказательстве теоремы.

С л е д с т в и е. Если V_∞ — положительно определенное решение уравнения (AP) в условиях теоремы 1, то все решения системы $\dot{x}(t) = [A - BB'V_\infty]x(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ и интеграл

$$J = \int_0^\infty e^{[A - BB'V_\infty]t} C'C e^{[A - BB'V_\infty]t} dt$$

является сходящимся. $\odot$

Таким образом, замкнутая система с обратной связью $u(t) = -B'V_\infty x(t)$, где V_∞ является решением уравнения (AP), будет асимптотически устойчивой системой.

Явный вид решения стационарного уравнения Риккати. Аналогично тому, как решение стационарных матричных уравнений § 12 может быть выражено через матричные экспоненты в том случае, когда существует решение соответствующего алгебраического уравнения Ляпунова, решение стационарного уравнения Риккати

$$\dot{V}(t) = -A'V(t) - V(t)A + V(t)BB'V(t), \quad V(0) = V_0 \quad (\text{УР})$$

можно записать в замкнутой форме в том случае, если известно решение алгебраического уравнения (AP). Обозначим решение (AP) через V_∞ и сделаем в уравнении (УР) следующую замену переменной: $\Psi(t) = V(t) - V_\infty$. Тогда

$$\dot{\Psi}(t) = -[A' - V_\infty BB']\Psi(t) - \Psi(t)[A - BB'V_\infty] + \\ + \Psi(t)BB'\Psi(t). \quad (4)$$

Уравнение по-прежнему является нелинейным, но если его справа и слева домножить на матрицу $\Psi^{-1}(t)$, то оно становится линейным относительно $\Psi^{-1}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \Psi^{-1}(t) = \\ = [A - BB'V_\infty] \Psi^{-1}(t) + \Psi^{-1}(t) + \Psi^{-1}(t)[A' - V_\infty BB'] - BB'.$$

Мы воспользовались равенством

$$\frac{d}{dt} \Psi^{-1}(t) = -\Psi^{-1}(t) \dot{\Psi}(t) \Psi^{-1}(t).$$

Линейные матричные уравнения вида (4) были рассмотрены в § 12. Имея в виду следствие теоремы 1, согласно которому $[A - BB'V_\infty]$ — устойчивая матрица, существует и единственна положительно определенная матрица Q_1 , которая удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$[A - BB'V_\infty]Q_1 + Q_1[A' - BB'V_\infty] - BB' = 0,$$

и одновременно

$$Q_1 = - \int_0^\infty e^{[A - BB'V_\infty]t} BB' e^{[A - BB'V_\infty]t} dt.$$

Решение уравнения (4) с использованием матрицы Q_1 запишется в виде (см. § 12)

$$\Psi^{-1}(t) = Q_1 + e^{[A - BB'V_\infty]t} [\Psi^{-1}(0) - Q_1] e^{[A - BB'V_\infty]t}.$$

Используя эту формулу, получим решение уравнения Риккати (УР) в явном виде

$$V(t, V_0, 0) =$$

$$= V_\infty + \{Q + e^{[A - BB'V_\infty]t} [(V_0 - V_\infty)^{-1} - Q_1] e^{[A' - V_\infty B' B]t}\}^{-1}.$$

Единственность оптимального управления. Приведем теперь один результат относительно единственности решения алгебраического уравнения Риккати (АР).

Теорема 2. Если система $\{A, B, C\}$ управляема и идентифицируема, то существует единственное решение уравнения $VA + A'V - VBB'V + C'C = 0$, которое обладает тем свойством, что матрица $[A - BB'V]$ устойчива.

Доказательство. Предположим противное. Пусть имеется две симметрических матрицы V_1 и V_2 , которые являются такими решениями приведенного в условии теоремы уравнения, что обе матрицы $[A - BB'V_i]$, $i = 1, 2$, имеют свои собственные значения слева от мнимой оси. Тогда все решения систем $\dot{x}(t) = [A - BB'V_i]x(t)$, $i = 1, 2$, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Более того, как

мы видели при доказательстве теоремы 2 § 34,

$$\begin{aligned} \int_0^t \{u'(s) u(s) + x'(s) C' C x(s)\} ds = \\ = x'(0) V_1 x(0) - x'(t) V_1 x(t) + \int_0^t \|u(t) + B' V_1 x(t)\|^2 dt = \\ = x'(0) V_2 x(0) - x'(t) V_2 x(t) + \int_0^t \|u(t) + B' V_2 x(t)\|^2 dt; \end{aligned}$$

поскольку по предположению $V_1 \neq V_2$ и обе матрицы симметрические, то существует x_0 такой, что $x_0' V_1 x_0 \neq x_0' V_2 x_0$. Пусть, например, $x_0' V_1 x_0 \geq x_0' V_2 x_0$. Тогда примем $u(t) = -B' V_2 x(t)$. Устремляя t к ∞ , имеем

$$x_0' V_2 x_0 = x_0' V_1 x_0 + \int_0^{\infty} \|B' (V_1 - V_2) x(t)\|^2 dt,$$

что очевидно невозможно. Мы пришли к противоречию, предположив, что $V_1 \neq V_2$ и $[A - BB'V_1]$ и $[A - BB'V_2]$ устойчивы. $\odot$

Стационарные регуляторы. Применяя теоремы 1, 2, можно анализировать еще один специальный случай. Именно, случай минимизации квадратичных функционалов для линейных стационарных систем на интервале $0 \leq t < \infty$. Эта задача имеет особый интерес из-за сравнительно простой формы представления ответа. Следующая теорема содержит основные результаты.

Т е о р е м а 3. Пусть стационарная система $\{A, B, C\}$ управляема и идентифицируема. Пусть, далее, V_{∞} — положительно определенное решение уравнения

$$A'V + VA - VBB'V = -C'C.$$

Тогда существует управление, которое минимизирует

$$J = \int_0^{\infty} \{u'(t) u(t) + x'(t) C' C x(t)\} dt$$

для системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$, причем минимальное значение J равно $x_0' V_{\infty} x_0$. Минимизирующее

управление в виде обратной связи имеет вид

$$u(t) = -B'V_{\infty}x(t),$$

а в разомкнутой форме — вид

$$u(t) = -B'V_{\infty}e^{[A-BB'V_{\infty}]t}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что если $\|x(t)\|$ приближается к нулю при $t \rightarrow \infty$, то интеграл

$$J = \int_0^{\infty} \{u'(t)u(t) + x'(t)C'Cx(t)\} dt$$

сходится. Это является немедленным следствием предположения об управляемости, из которого с учетом теоремы 1 § 33 следует

$$\min_u \int_0^{t+1} \{u'(t)u(t) + x'(t)C'Cx(t)\} dt \geq x'(t)V(0,0,t)x(t) \geq \geq \varepsilon \|x(t)\|.$$

Сделаем замену переменной

$$v(t) = u(t) + B'V_{\infty}x(t),$$

называемую иногда *преобразованием Риккати*. Уравнения движения примут вид

$$\dot{x}(t) = [A - BB'V_{\infty}]x(t) + Bv(t),$$

и J становится равным

$$J = \int_0^{\infty} \{[v(t) - B'V_{\infty}x(t)]'[v(t) - B'V_{\infty}x(t)] + x'(t)CC'x(t)\} dt.$$

Преобразуя подынтегральное выражение с использованием равенства

$$V_{\infty}A + A'V_{\infty} - V_{\infty}BB'V_{\infty} - C'C,$$

получим

$$J = \int_0^{\infty} \{v'(t)v(t) - [(A - BB'V_{\infty})x(t) + Bv(t)]'V_{\infty}x(t) - x'(t)V_{\infty}[(A - BB'V_{\infty})x(t) + Bv(t)]\} dt - \int_0^{\infty} v'(t)v(t) dt - x'(t)V_{\infty}x(t) \Big|_0^{\infty}.$$

Из следствия теоремы 1 известно, что все решения

$$\dot{x}(t) = [A - BB'V_{\infty}]x(t)$$

стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Поэтому лучший выбор $v(t)$ есть 0. ⊙

Структурная схема стационарного оптимального регулятора приведена на рис. 3.5.1.

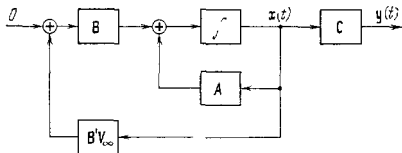


Рис. 3.5.1.

Пример. Рассмотрим минимизацию

$$J = \int_0^T \{u^2(t) + x^2(t)\} dt$$

для $\dot{x}(t) = u(t)$. Уравнение Риккати в этом случае имеет вид

$$\dot{v}(t) = v^2(t) - 1.$$

Можно, конечно, прямо решить это уравнение, но цель состоит в иллюстрации полученных выше результатов, и поэтому мы будем следовать всем этапам предыдущих рассуждений. Имеется положительно определенное решение уравнения $v^2 - 1 = 0$, $v = \pm 1$ (есть и решение $v = -1$, которое не представляет для нас интереса). Пусть $\Psi = v - 1$, тогда

$$\dot{\Psi}(t) = \Psi^2(t) + 2\Psi(t);$$

поделив на Ψ^2 и полагая $\Psi^{-1} = \phi$, получим

$$\dot{\phi}(t) = -[2\phi(t) + 1].$$

Значит, $\varphi(t) = \alpha e^{-2t} - \frac{1}{2}$ и

$$v(t) = \Psi(t) + 1 = \frac{1}{\alpha e^{-2t} - \frac{1}{2}} = \frac{2\alpha e^{-2t} + 1}{2\alpha e^{-2t} - 1}.$$

Если $x(0)$ фиксировано, а $x(T)$ свободно, то минимизирующее $u(t)$ равно $-v(t)x(t)$, где α в определении $v(t)$ выбирается так, чтобы выполнить условие $v(T) = 0$. Минимальное значение интеграла в этом случае равно $x^2(0)v(0)$ и

$$v(t) = \frac{1 - e^{2(t-T)}}{1 + e^{2(t-T)}} = \text{th}(T - t).$$

Заметим, что $v(t) \rightarrow 1$ при $(t - T) \rightarrow 0$. $\odot$

З а м е ч а н и е. Результат, аналогичный теореме 3, может быть получен для квадратичного функционала вида

$$J = \int_0^{\infty} \{u'(t) R u(t) + x'(t) L x(t)\} dt,$$

где $L = L'$ симметрическая неотрицательно определенная матрица, а R — положительно определенная матрица.

Задачи. 1. Пусть система $\{A, B, C\}$ управляема и наблюдаема. Пусть V_{∞} — симметрическое положительно определенное решение уравнения $A'V + VA - VBB'V + C'C = 0$. Покажите, что $V(t_1, Q, 0)$ приближается к V_{∞} при $t_1 \rightarrow -\infty$ для всех $Q = Q' \geq 0$.

2. Пусть V_{∞} является решением $A'V + VA - VBB'V + M = 0$ таким, что матрица $[A - BB'V_{\infty}]$ устойчива. Предположим, что N определена условием

$$N = \int_0^{\infty} e^{[A - BB'V_{\infty}]'t} BB'e^{[A - BB'V_{\infty}]'t} dt$$

и обратима. Тогда покажите, что $V_{\infty} = N^{-1}$ является также решением уравнения

$$A'V + VA - VBB'V + M = 0.$$

и что матрица $[A - BB'V_{\infty} + BB'N^{-1}]$ устойчива.

3. Получите с помощью теоремы 1 доказательство утверждения: всякая положительно определенная матрица имеет единственный симметрический положительно определенный квадратный корень.

4. Пусть V_∞ является положительно определенным решением квадратного матричного уравнения

$$A'V + VA - VBB'V + C'C = 0;$$

если $A = A'$ и $B = C'$, то покажите, что V_∞^{-1} тоже удовлетворяет этому уравнению. Если система $\{A, B, C\}$ управляема и наблюдаема, то могут ли существовать другие положительно определенные решения?

5. Найдите α и β такие, что для уравнения

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \beta x(t) = 0$$

интеграл

$$J = \int_0^\infty \{ \dot{x}^2(t) + [\alpha \dot{x}(t) + \beta x(t)]^2 \} dt$$

имеет минимум. Покажите, что ответ не зависит от $\dot{x}(0)$ и $x(0)$. Объясните, почему?

6. Покажите, что закон управления в виде обратной связи для стационарной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

и критерия качества

$$J = \int_0^{t_1} \{ u'(t)u(t) + x'(t)C'Cx(t) \} dt + x'(t_1)Qx(t_1)$$

имеет форму $u(t) = Kx(t)$, где K — постоянная матрица, в том случае, если Q удовлетворяет уравнению

$$QA + A'Q - QBB'Q + C'C = 0$$

и является положительно определенной матрицей.

7. Пусть $\{A, B, C\}$ стационарная управляемая и наблюдаемая система. Найдите $u(t)$ такое, что для

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad c' = [1 \ 0]$$

интеграл

$$J = \int_0^\infty u'(t)u(t) dt + \int_1^\infty y'(t)y(t) dt$$

имеет минимум.

8. Для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

и критерия качества

$$J = \int_0^\infty e^{2t} (u^2(t) + x_1^2(t)) dt$$

покажите, что вещественные части собственных чисел замкнутой оптимальной системы удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i < -1$.

9. Пусть $\dot{x}(t) = \alpha x(t) + u(t)$, $J = \int_0^{\infty} \{u^2(t) + \beta x^2(t)\} dt$, где

α, β — положительные постоянные. Вычислите оптимальный закон управления, решив соответствующее уравнение Риккати. Будет ли полученная замкнутая система асимптотически устойчива?

10. Вычислите оптимальное управление для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \quad -1], \quad J = \int_0^{\infty} \{u^2(t) + x_1^2(t)\} dt.$$

У к а з а н и е. Введите дополнительную переменную состояния $x_3 = u(t)$ и рассмотрите полученную систему 3-го порядка.

11. Покажите, что решение алгебраического уравнения Риккати в условиях теоремы 1 является функцией Ляпунова.

§ 36. О решении уравнения Риккати

В §§ 33—35 были получены условия, при которых существует решение задачи оптимального управления с квадратичным критерием качества. Эти условия были получены вместе с формулами для минимизирующего управления и для оптимальной траектории. Все эти конструкции зависели от возможности решить матричное уравнение Риккати при определенных граничных условиях, заданных в некоторый момент времени. Здесь мы исследуем уравнение Риккати само по себе. Покажем связь уравнения Риккати с линейной системой сопряженных уравнений, именно, установим, как связано уравнение Риккати с системой канонических уравнений Гамильтона.

Локальные условия существования решения уравнения Риккати. Начнем с установления важного, и, вообще говоря, удивительного факта, состоящего в том, что решение уравнения Риккати может быть сведено к решению соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений. Сначала заметим, что скалярное уравнение Риккати может быть приведено к линейному уравнению 2-го порядка (или к системе двух линейных уравнений 1-го порядка) простым преобразованием переменных.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x}(t) + \beta(t)\dot{x}(t) + \gamma(t)x(t) = 0.$$

Примем $k(t) = \dot{x}(t) / x(t)$, тогда

$$\dot{k}(t) = \left[\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \right] - \left[\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \right]^2$$

и, значит,

$$\dot{k}(t) + k^2(t) + \beta(t)k(t) = -\gamma(t).$$

Подобное преобразование можно привести и в нескаларном случае. Начнем, однако, не с векторного уравнения 2-го порядка, а с пары линейных векторных уравнений 1-го порядка.

Л е м м а. Пусть Φ является переходной матрицей для системы $2n$ линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t) B'(t) \\ -L(t) & -A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим разбиение матрицы Φ на блоки размером $(n \times n)$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}.$$

Если определить матрицу K в виде

$$K(t, Q, t_1) = [\Phi_{22}(t_1, t) - Q\Phi_{12}(t_1, t)]^{-1} [Q\Phi_{11}(t_1, t) - \Phi_{21}(t_1, t)]$$

или, эквивалентно этому представлению, в виде

$$K(t, Q, t_1) = [\Phi_{21}(t, t_1) + \Phi_{22}(t, t_1)Q][\Phi_{11}(t, t_1) + \Phi_{12}(t, t_1)Q]^{-1},$$

то, очевидно, $K(t_1, Q, t_1) = Q$ и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(t, Q, t_1) = & -A'(t)K(t, Q, t_1) - K(t, Q, t_1)A(t) + \\ & + K(t, Q, t_1)B(t)B'(t)K(t, Q, t_1) - L(t) \end{aligned}$$

в том случае, если указанное обращение существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму только для первого из указанных представлений матрицы $K(t, Q, t_1)$. Сначала вспомним равенства, доказанные ранее (см. § 10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_B(t_1, t) &= -\Phi_B(t_1, t)B(t), \\ \frac{d}{dt} P^{-1}(t) &= -P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t). \end{aligned}$$

Используя эти два факта, проверим, что матрица $K(t, Q, t_1)$

в том виде, как она приведена в условии теоремы, удовлетворяет уравнению Риккати. Граничные условия очевидно выполнены, поскольку $\Phi(t_1, t_1) = E$. Займемся алгебраическими выкладками. Определим матрицы $X(t)$ и $P(t)$ следующим равенством:

$$[X(t), -P(t)] = [Q, -E] \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_1, t) & \Phi_{12}(t_1, t) \\ \Phi_{21}(t_1, t) & \Phi_{22}(t_1, t) \end{bmatrix}.$$

В соответствии с утверждением леммы $K(t, Q, t_1) = P^{-1}(t)X(t)$ и отсюда

$$\frac{d}{dt} K(t, Q, t_1) = -P^{-1}(t) \dot{P}(t) P^{-1}(t) X(t) + P^{-1}(t) \dot{X}(t).$$

Используя свойства Φ , имеем

$$[\dot{X}(t), -\dot{P}(t)] = [X(t), P(t)] \begin{bmatrix} -A(t) & B(t)B'(t) \\ L(t) & A'(t) \end{bmatrix},$$

отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(t, Q, t_1) &= P^{-1}(t) X(t) B'(t) P^{-1}(t) X(t) - \\ &\quad - P^{-1}(t) P(t) A'(t) P^{-1}(t) P^{-1}(t) X(t) - \\ &\quad - P^{-1}(t) X(t) A(t) - P^{-1}(t) P(t) L(t) = \\ &= K(t, Q, t_1) B(t) B'(t) K(t, Q, t_1) - A'(t) K(t, Q, t_1) - \\ &\quad - K(t, Q, t_1) A(t) - L(t). \quad \odot \end{aligned}$$

Естественно, что матрица $[\Phi_{22}(t_1, t) - Q\Phi_{12}(t_1, t)]$, которая появляется в приведенном выше выражении для K , не обязательно обратима при всех t . Поэтому из леммы, конечно, не следует существование решения уравнения Риккати для всех моментов времени. Однако $\Phi_{22}(t_1, t_1) = E$ и $\Phi_{12}(t_1, t_1) = 0$ являются непрерывными функциями времени. Так как E обратима, то понятно, что $[\Phi_{22}(t_1, t) - Q\Phi_{12}(t_1, t)]$ тоже обратима для тех t , при которых величина $t - t_1$ достаточно мала в сравнении с Q . Поэтому для моментов времени, близких к начальному, мы имеем следующую локальную теорему существования решения уравнения Риккати.

Т е о р е м а 1 (локальная теорема существования решения уравнения Риккати). Пусть матрицы A , B и L ограничены на интервале $|t - t_0| \leq T$, а K_0 — заданная постоянная матрица. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое,

что для $|t - t_0| < \varepsilon$ единственное решение уравнения Риккати существует на интервале $|t - t_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Существование следует из предыдущей леммы, если принять $K_0 = Q$. Единственность следует из того факта, что в любом ограниченном подмножестве $R^{n \times n}$ правая часть уравнения Риккати удовлетворяет условию Липшица, и значит, применима теорема единственности решения дифференциального уравнения. $\odot$

Пример. Рассмотрим уравнение Риккати

$$\dot{k}(t) = k^2(t) + 1.$$

Связанная с ним система линейных уравнений является гармоническим осциллятором:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

Решение, соответствующее $x(0) = 1$, $p(0) = k_0$, имеет вид

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k_0 \end{bmatrix},$$

поэтому

$$K(t, k_0, 0) = \frac{k_0 \cos t - \sin t}{\cos t - k_0 \sin t}.$$

Канонические уравнения. Линейная система $2n$ уравнений имеет каноническую форму, если существует скалярная функция H , называемая *гамильтонианом*, такая, что H зависит от x , p и t :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned}$$

Очевидно, что квадратичные гамильтонианы приводят к линейным уравнениям. Для пары уравнений, приведенных выше, соответствующий им гамильтониан имеет вид

$$H(x, p, t) = \frac{1}{2} x'(t) L(t) x(t) + p'(t) A(t) x(t) - \frac{1}{2} p'(t) B(t).$$

Эти понятия играют центральную роль в классическом вариационном исчислении и в теории принципа максимума Понтрягина.

Следующая теорема, приведенная без доказательства, проясняет одну из причин этого обстоятельства.

Т е о р е м а 2. Пусть $x(t)$ и $u(t)$ оптимальны в смысле теоремы 1 § 33 или теоремы 2 § 34. Тогда существует n -вектор $p(t)$ такой, что $x(t)$ и $p(t)$ удовлетворяют системе $2n$ канонических уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)B'(t) \\ -L(t) & -A'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ p(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix},$$

причем оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = -B'(t)p(t). \odot$$

В классическом вариационном исчислении условия существования минимума формулируют в терминах отсутствия сопряженных точек и фокальных точек для траектории канонической системы. Напомним, что две точки в моменты времени t_0 и t_1 называются *сопряженными точками*, если можно найти нетривиальное решение канонических уравнений такое, что $x(t_0) = x(t_1) = 0$. Две точки называются *фокальными*, если можно найти нетривиальное решение канонических уравнений такое, что $x(t_0) = p(t_1) = 0$. Существование минимума и отсутствие сопряженных и фокальных точек связано между собой следующим образом.

Из теоремы 1 § 33 известно, что задача со свободным конечным состоянием без ограничений имеет решение, если соответствующее уравнение Риккати имеет решение $K(t, Q, t_1)$, которое существует в интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Можно доказать, что это справедливо тогда и только тогда, когда на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ нет фокальных точек, т. е. что условие отсутствия фокальных точек на рассматриваемом интервале времени является необходимым и достаточным условием существования решения уравнения Риккати.

Для задачи с фиксированным конечным состоянием достаточным условием существования минимума является условие существования матрицы $K(t, K_1, t_1)$ для некоторой симметрической матрицы K_1 . Вопрос о точном выборе K_1 оставлен открытым.

Можно показать, что выбор такой матрицы начальных условий K_1 , которая обеспечивает существование решения на $t_0 \leq t \leq t_1$, возможен тогда и только тогда, когда интервал $t_0 \leq t \leq t_1$ не содержит сопряженных точек.

Пример. Рассмотрим задачу минимизации

$$J = \int_0^T \{u^2(t) - x^2(t)\} dt,$$

где $\dot{x}(t) = u(t)$ и $x(0) = 0$. Канонические уравнения для этой задачи

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix},$$

их решение имеет вид

$$x(t) = A \sin t + B \cos t, \quad p(t) = -x(t).$$

Рассмотрим задачу с фиксированным конечным состоянием. Видно, что интервал $0 \leq t \leq \pi$ не содержит сопряженных точек, поэтому при $T < \pi$ и при граничных условиях $x(0) = x(T) = 0$

$$\min_u \int_0^T \{\dot{x}^2(t) + x^2(t)\} dt = 0.$$

Если теперь рассмотреть задачу со свободным конечным состоянием, то $x(t) = \sin t$ и $x(0) = p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Значит, точки $x(0)$ и $x\left(\frac{\pi}{2}\right)$ являются фокальными точками. Интервал же, свободный от фокальных точек, есть $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$.

До сих пор не рассматривалось влияние на существование решения той части критерия качества, которая отражает стоимость конечного состояния и имеет вид $x'(t_1)Qx(t_1)$.

Один из наиболее легких качественных результатов дает следующая теорема.

Теорема 3. Если $Q_1 - Q_2$ неотрицательно определена, то для всех $t < t_1$ разность $K(t, Q_1, t_1) - K(t, Q_2, t_1)$ неотрицательно определена, если обе матрицы K существуют. Поэтому, если решение, проходящее через Q_2 , существует на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то по меньшей мере на том же интервале существует решение, проходящее через Q_1 .

Доказательство. Утверждение теоремы является прямым следствием теоремы 1 § 34, которая утвер-

ждает, что величина $x'(0)K(t_0, Q_1, t_1)x(0)$ является минимумом J . Ясно, что возрастающая «цена» конечного состояния системы увеличивает общую стоимость. $\odot$

Существование решения на полубесконечном интервале. Теперь займемся вопросом существования решения уравнения Риккати на всей полуоси. Как видно из последнего простого примера, нужны нетривиальные предположения, чтобы $K(t)$ не обратилось в бесконечность при конечном значении t . Чтобы исследовать этот вопрос, предположим, что $L(t)$ в дополнение к тому, что она — симметрическая, является еще неотрицательно определенной. Также будем предполагать управляемость системы.

Теорема 4. Предположим, что грамиан управляемости для системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ — положительно определенная матрица и $L(t) = L'(t)$ — неотрицательно определенная матрица при всех t . Если $K(t, 0, t_1)$ является таким решением уравнения (УР), которое проходит через 0 при $t = t_1$, тогда при данном t_0 $K(t, 0, t_1)$ существует на $t_0 \leq t \leq t_1$ независимо от t_0 . Более того,

$$K(t_0, 0, t_1) \leq K(t_0, 0, t_2) \quad \text{для} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2 \quad (1)$$

и

$$0 \leq K(t_0, 0, t_2) \leq N(t_0, t_1) \quad \text{для} \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2,$$

где

$$N(t_0, t_1) = [W(t_0, t_1)]^{-1} + \int_{t_0}^{t_1} x_1'(\sigma) L(\sigma) x_1(\sigma) d\sigma,$$

 $x_1(\sigma) =$

$$= \left\{ \Phi(\sigma, t_0) - \int_{t_0}^{\sigma} \Phi(\sigma, \rho) B(\rho) B'(\rho) \Phi'(t_0, \rho) d\rho [W(t_0, t_1)]^{-1} \right\} x_0,$$

а Φ — переходная матрица для $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Доказательство. Из теоремы о локальном существовании решения уравнения Риккати мы знаем, что если $t - t_1$ — достаточно малое число, то $K(t, Q, t_1)$ существует, а из теоремы 1 § 33 имеем

$$x'(t) K(t, 0, t_1) x(t) = \min_u \int_t^{t_1} \{u'(t) u(t) + x'(t) L(t) x(t)\} dt.$$

Используя теперь неравенство $L(t) \geq 0$, имеем в силу существования $K(t, 0, t_1)$, что

$$K(t, 0, t_1) \geq 0.$$

Более того, если $K(t, 0, t_1)$ и $K(t, 0, t_2)$ существуют при $t_0 \leq t \leq t_1$ и $t_0 \leq t \leq t_2$ соответственно, то при $x(t_0) = x_0$ и $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} x'_0 K(t_0, 0, t_1) x_0 &= \min_u \int_{t_0}^{t_1} \{u'(t) u(t) + x'(t) L(t) x(t)\} dt \leq \\ &\leq \min_u \int_{t_0}^{t_2} \{u'(t) u(t) + x'(t) L(t) x(t)\} dt = x'_0 K(t_0, 0, t_2) x_0. \end{aligned}$$

Поскольку это условие выполнено для любых x_0 , оно эквивалентно неравенству (1), устанавливающему монотонное поведение $K(t)$. Остается показать, что $K(t)$ существует на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ для всех t_1 .

Так как единственная причина, по которой матрица $K(t)$ могла бы не существовать, состоит в том, что она обращается в бесконечность при конечном значении t , можно доказать существование, показав, что матрица K ограничена. Рассмотрим управление вида

$$u_1(t) = \begin{cases} -B'(t) \Phi'(t_0, t) [W(t_0, t_1)]^{-1} x(t_0), & t_0 \leq t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t, \end{cases}$$

приложенное к системе в момент t_0 . Как известно из теоремы 2 § 19, это управление приводит $x(t)$ в нуль в момент t_1 , и в силу того, что при $t \geq t_1$ управление — нулевое, нулевое состояние сохраняется для всех $t \geq t_1$. Поэтому для этого управления и соответствующего ему отклика $x_1(t)$ выполнено условие

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{\infty} \{u'_1(t) u_1(t) + x'_1(t) L(t) x_1(t)\} dt \geq \\ &\geq \min_u \int_{t_0}^{t_2} \{u'(t) u(t) + x'(t) L(t) x(t)\} dt = x'_0(t_0) K(t_0, 0, t_2) x(t_0) \end{aligned}$$

для всех $t_2 > t_1$. Вычисления показывают, что левая часть этого неравенства равна $x'(t_0) N(t_0, t_1) x(t_0)$. Поскольку матрица $N(t_0, t_1)$, очевидно, конечна при всех t_0 ,

мы видим, что $K(t, 0, t_1)$ существует на любом интервале $t_0 \leq t \leq t_1$.

Численное интегрирование уравнения Риккати на конечном временном интервале. Из леммы следует, что решение уравнения Риккати для стационарной системы $\{A, B, C\}$ с критерием оптимальности

$$J = \int_0^{t_1} \{y'(t) y(t) + u'(t) u(t)\} dt$$

представимо в виде

$$K(t) = \{\Phi_{21}(0, t) + \Phi_{22}(0, t)K(0)\} \{\Phi_{11}(0, t) + \Phi_{12}(0, t)K(0)\}^{-1}, \quad (2)$$

где

$$K(0) = -\Phi_{22}^{-1}(0, t_1) \Phi_{21}(0, t_1), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (3)$$

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(0, t) & \Phi_{12}(0, t) \\ \Phi_{21}(0, t) & \Phi_{22}(0, t) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} A & -BB' \\ -E & -A' \end{bmatrix}.$$

Поэтому матрицу $K(t)$ можно вычислить, если вычислить значение e^{Dt} . Используем для вычисления этой матричной экспоненты алгоритм § 13. Такой подход предложен в работе [64]. Тогда

$$\exp(Dh) = \Lambda + O(h^5), \quad \text{где}$$

$$\Lambda = \left\{ E - \frac{h}{2} D + \frac{h^2}{12} D^2 \right\}^{-1} \left\{ E + \frac{h}{2} D + \frac{h^2}{12} D^2 \right\}$$

и $O(h^5)$ означает ошибку аппроксимации ряда для экспоненты, имеющую порядок h^5 .

Если матрица Λ вычислена, то требуется k матричных умножений для вычисления $\exp(Dt)$ в точках $h, 2h, 4h, 8h, \dots, 2^k h$. Причем, очевидно, $\exp(2hD) = \Lambda \cdot \Lambda = \Lambda^2$, $\exp(2^2 hD) = \Lambda^2 \Lambda^2 = \Lambda^4, \dots, \exp(2^k hD) = \Lambda^{2^{k-1}} \Lambda^{2^{k-1}} = \Lambda^{2^k}$, где k — целое число, выбираемое так, чтобы шаг интегрирования $h = t_1/2^k$ был достаточно малым, чтобы обеспечить малую ошибку аппроксимации $O(h^5)$.

После вычисления матрицы $\exp(Dt)$ при $0 \leq t \leq t_1$ значение $K(0)$ вычисляется по формуле (3), а значение $K(t)$ — по формуле (2).

Этот алгоритм обеспечивает высокую скорость сходимости вычислений. Однако он плохо работает при $t_1 \rightarrow \infty$,

поскольку в этом случае столбцы матрицы $\Phi_{22}(0, t)$ становятся линейно зависимыми и матрица $K(0)$ не определена.

Общее время вычислений, требуемое для расчета $K(t)$, приблизительно равно $(25 + 12k)\mu n^3$, где μ — время операции умножения, k обычно варьируется в пределах 5 — 20. Приблизительно $\frac{9+k}{(25+12k)} \cdot 100\%$ общего времени занимают вычисления обратных матриц [61].

Итерационное решение алгебраического уравнения Риккати. Рассмотрим алгоритм решения уравнения

$$A'V + VA - VBV'V + C'C = 0, \quad (\text{AP})$$

основанный на итерационной процедуре, построенной при доказательстве теоремы 1 § 35. Он состоит из следующих шагов:

1. $K_m = B'V_{m-1}$.
2. $A_m = A - BK_m$.
3. Вычисляем V_m как решение линейного матричного уравнения

$$A_m'V + VA_m + C'C + K_m'K_m = 0.$$

4. Проверяем условия окончания вычислений

$$\|V_m - V_{m-1}\| \leq \varepsilon.$$

Вычисления 1—4 осуществляем при $m = 1, 2, \dots$. Чтобы начать вычисления, необходимо подобрать K_0 таким образом, чтобы матрица $[A - BK_0]$ была устойчивой.

Сделаем в связи с этим алгоритмом ряд замечаний.

1. Построенная процедура подобна методу Ньютона решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$. Она имеет простую геометрическую интерпретацию в скалярном случае. Тогда уравнение (AP) является простым квадратным уравнением. Решение этого уравнения методом Ньютона строится по формуле

$$V_{m+1} = V_m - \frac{f(V_m)}{f'(V_m)} = V_m - \frac{2AV_m - B^2V_m^2 + C^2}{(2A - 2B^2V_m)},$$

из которой следует

$$(2A - 2B^2V_m)V_{m+1} + B^2V_m^2 + C^2 = 0.$$

Это уравнение совпадает с линейным уравнением

$$(A - BB'V_m)V_{m+1} + V_{m+1}(A - BB'V_m) + CC' + V_m BB'V_m = 0,$$

решаемом на каждом шаге итерационного процесса. Геометрическая интерпретация итерационного решения уравнения (AP) в скалярном случае дана на рис. 36.1.

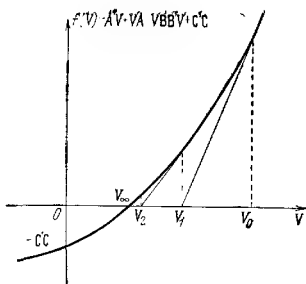


Рис. 36.1.

2. Известно, что метод Ньютона обеспечивает квадратичную сходимость вблизи точки решения. Это свойство сохраняется и в матричном случае. Можно показать [66], что в условиях приведенного алгоритма

$$\|V_{m+1} - V_{\infty}\| \leq \tilde{\alpha} \|V_m - V_{\infty}\|^2,$$

где α — положительное число.

3. Для выбора начального значения K_0 можно использовать алгоритм построения устойчивого регулятора по состоянию, приведенный в § 23. Решение линейного матричного уравнения Ляпунова можно реализовать с помощью процедуры, приведенной в § 16.

Задачи. 1. Найти управление, которое приводит систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

из $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ при $t = 0$ на круг $x_1^2 + x_2^2 = 1$ при $t = 1$ и минимизирует

$$J = \int_0^1 \{u^2(t) + x_1^2(t)\} dt.$$

2. Доказать теорему 2.

3. Вычислить такой линейный закон управления для системы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = E,$$

который минимизирует критерий качества

$$J = \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Составить программу для ЦВМ, используя алгоритм, приведенный в тексте.

4. Пользуясь итерационной процедурой решения алгебраического уравнения Риккати, вычислить стационарный оптимальный закон управления для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

для критерия качества

$$J = \int_0^\infty [5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 10u^2] dt.$$

Составить программу для ЦВМ.

5. Показать, что для системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c' = [1 \quad -1].$$

с критерием качества

$$J = \int_0^\infty [\dot{u}^2(t) + x_1^2(t)] dt$$

оптимальный закон управления имеет вид

$$\dot{u}(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) - 2u(t).$$

6. Решить дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} K(t) - \\ - K(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] K(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K(0) = 0,$$

используя решение соответствующего уравнения 4-го порядка (см. лемму).

7. Получить результаты теорем 1, 2, 3, 4 для квадратичного критерия вида

$$J = \int_0^{\infty} [x'(t) C' L C x(t) + u'(t) R u(t)] dt,$$

где L и R — положительно определенные матрицы.

8. (Shubert Н. А.). Показать, что матрица $K = D^{-1} [(D')^{-1} A + L]$, где матрицы D и L определены соотношениями

$$D'D = BR^{-1}B', \quad L'L = Q + A'(D'D)^{-1}A,$$

является единственным положительно определенным решением алгебраического уравнения Риккати

$$Q + A'K + KA' - KBR^{-1}B'K = 0$$

в том случае, если R — положительно определенная симметрическая матрица, а матрица B — неособенная.

9. Пользуясь результатом задачи 8, вычислить оптимальную обратную связь для системы $\dot{x}_1(t) = u_1(t)$, $\dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t)$ при следующем критерии качества:

$$J = \int_0^{\infty} [x_2^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt.$$

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Многие важные обстоятельства, сопутствующие процессу инженерного проектирования систем управления линейными объектами, не были учтены в изложенном выше подходе, основанном на методах пространства состояний. При использовании этой теории для решения практических задач читателю необходимо иметь в виду, что принятые выше допущения о стационарности и линейности (а не только линеаризуемости) объекта и законов управления, о точном задании всех параметров системы, об отсутствии ограничений на управляющие воздействия и фазовые переменные, о бесконечной полосе пропускания усилителей в цепи обратной связи и т. п. редко выполняются на практике одновременно.

Кроме того, в рассмотренных формулировках задач модального и оптимального управления явно не фигурировали требования к важнейшим характеристикам переходного процесса: время регулирования, колебательность, монотонность и др. Вместе с тем известно, что подчас совсем не просто выбрать характеристические числа замкнутой системы или коэффициенты в квадратичном критерии качества так, чтобы переходный процесс удовлетворял бы нужным техническим условиям. Далее, существенное влияние на переходный процесс оказывают нули передаточной функции, а алгоритмы эффективного управления нулями с помощью линейных обратных связей здесь не рассматривались. Наконец, поскольку при изготовлении любой системы ее параметры удается реализовать лишь с конечной точностью, то совершенно необходимо исследовать чувствительность получаемых структур по отношению к колебаниям (причем не обязательно малым) коэффициентов в цепях обратных связей и в уравнениях объекта. Отсутствие исследования вопросов чувствительности в тексте этой работы вовсе не означает, что таких исследований

не ведется в рамках упомянутых методов. Работы, посвященные этой проблеме, многочисленны и их поток непрерывно растет. Тем не менее, безусловно, в этой области осталось еще много нерешенных проблем. С вопросами чувствительности тесно связаны вычислительные трудности, которые могут возникнуть при решении систем линейных алгебраических уравнений, используемых для вычисления коэффициентов регуляторов. Эти трудности особенно часто проявляются при большой размерности задачи или при ее плохой вычислительной обусловленности.

Все перечисленные трудности применения алгебраического подхода к синтезу систем дают почву для оживленной полемики в литературе по управлению относительно теоретической ценности и практической целесообразности использования методов пространства состояний, примерно в том плане, как они были изложены выше. Крайняя точка зрения утверждает *), что методы пространства состояний являются «крайне наивными и несовершенными в практическом смысле», что «хотя все эти задачи и интересны с математической точки зрения, но они либо несущественны с инженерной точки зрения конструирования систем с обратной связью, либо формализм пространства состояний значительно усложняет проблему, в то время как много более прозрачные результаты получены с помощью передаточных функций».

Безусловно, трудно представить теорию управления без передаточных функций и частотных методов, которые имеют ясный физический смысл, многократно апробированы и хорошо зарекомендовали себя при решении различных проблем конструирования реальных систем управления. Но нельзя согласиться и с точкой зрения вышеупомянутых авторов на роль методов пространства состояний.

Начатый Р. Калманом и другими исследователями процесс алгебраизации теории управления имеет большое методическое значение. Так, например, используя теорию модулей над кольцом многочленов, удалось с единых позиций изложить частотные и временные методы, не прибегая к преобразованию Лапласа, ввести более общее определение передаточной функции, построить единую теорию

*) Horowitz I., Shaked U., IEEE. Trans. Autom. Contr., 1975, v. AC — 20, N 1, 84—97.

реализации дискретных и непрерывных линейных систем, как стационарных так и нестационарных [24]. Имеются попытки построения еще более общей теории *), использующей аппарат теории категорий и позволяющей с единой точки зрения и на едином математическом языке излагать проблемы управления конечномерными и распределенными объектами как линейными, так и нелинейными.

Большое практическое значение изложенной выше теории состоит в том, что с ее помощью удастся исчерпывающим образом описать решение задачи синтеза системы управления (в отдельных практически важных частных случаях), причем сама структура системы получается в результате решения строго сформулированной задачи без каких-либо дополнительных допущений или упрощений интуитивного порядка. Кроме того, и это может быть самый интересный факт, решение задачи синтеза оказывается подчас проще, чем решение задачи анализа системы с произвольно заданной структурой той же сложности, хотя в классической теории регулирования всегда считалось справедливым обратное положение вещей. Действительно, в примере синтеза регулятора для объекта 4-го порядка, приведенном в § 27, чтобы выбрать структуру и коэффициенты динамической обратной связи, обеспечивающей заданное размещение полюсов замкнутой системы на комплексной плоскости, необходимо выполнить ряд умножений матриц, т. е. выполнить вычисления по конечным алгебраическим формулам, заданным в явном виде. Для исследования динамики такой системы с произвольно выбранной динамической обратной связью 3-го порядка необходимо по крайней мере определить или оценить размещение корней полинома 7-го порядка. А это, как известно, задача, которую нельзя решить с помощью явных формул. Необходимо использовать приближенные вычисления, итерационные процедуры и т. п.

Безусловно, такое простое решение получено за счет существенной идеализации задачи. Пользуясь терминологией исследования операций, можно сказать, что в данном случае существенное расширение множества стратегий в исследуемой операции (решение задачи регулирования),

*) Arbib M. A., Manes E. D., *Automatica*, 1974, v. 10, № 3, 285—302.

получаемое за счет предположений об идеальной точности элементов, неограниченности управлений, полос пропускания и фазовых переменных позволяют, как это нередко бывает в подобного рода задачах, *) получить вполне простое решение.

Можно предположить, что подобного рода эффективные методы решения задач синтеза грубых систем удастся построить в рамках методов простраиваема состояний, так как при алгебраическом подходе представляется естественным при формулировке задачи синтеза включить параметры, характеризующие неустойчивость, разброс, неопределенность коэффициентов объекта и регулятора, в число выбираемых при синтезе параметров.

Построение такой теории синтеза грубых систем позволит эффективно решать задачи синтеза допусков на неустойчивость отдельных коэффициентов системы по заданным допускам на неустойчивость ее выходных характеристик.

Добавление при корректуре. При чтении корректуры этой книги автор познакомился с интересной работой Н. Т. Кузнецова «Модальное управление и наблюдающие устройства» («Машиностроение», 1976), в которой наряду с теоретическими результатами дано решение ряда практических задач конструирования систем управления летательными аппаратами (автопилотов, гиросtabilизаторов, орбитальных гироскопов и т. п.). В частности, приведенный на стр. 99-114 пример синтеза гиросtabilизатора служит убедительной иллюстрацией того положения, что использование наблюдающих устройств (идентификаторов состояния) и модального управления позволяет подчас синтезировать регулятор с более высокими показателями качества переходного процесса, чем это достижимо с помощью частотного метода или метода корневого годографа.

Июнь 1976 г.

*) Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций. «Наука», 1974,

УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ

Глава I. Излагаемые здесь вопросы традиционны и подробно освещены в фундаментальных трудах [5, 6, 10, 11, 13, 16, 29, 35, 37, 43, 44, 45, 46]. Кроме того, в §§ 7, 8 использован материал работ [52, 55], в §§ 3, 4 — неопубликованные лекции Б. В. Лидского по линейной алгебре, читанные в МФТИ в 1958 году.

Глава II. Основные факты имеются в книгах [22, 27, 30, 38, 40, 47]. Содержание §§ 11, 12 основано на материале книги [52]. § 13 основан на работах [18, 45, 56, 57].

Глава III. Основные источники [3, 4, 6, 13, 19, 21, 31, 32, 34, 36, 48, 52, 64, 72].

Глава IV. Основные факты имеются в работах [23, 24, 41, 52, 55, 20, 21]. При изложении канонических представлений многомерных объектов мы следуем работе [55]. Другие подходы имеются в работах [70, 81, 88].

Глава V. Основными источниками являются работы американских авторов [24, 55, 68, 69, 71].

Глава VI. Модальный подход к конструированию регуляторов систематически развивается в книгах [24, 55, 80, 81] и в статьях [51, 53, 59, 60, 62, 74, 76—78, 84—89].

Глава VII. Эта традиционная задача подробно освещена в работах [2, 24, 32, 41, 47, 52, 67, 73]. Укажем на статьи, в которых имеются методы численного решения уравнения Риккати: [54, 61, 66, 86].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования. Изд-во «Наука», 1966.
2. Атанас М., Фалб П., Оптимальное управление. Перев. с англ., изд-во «Машиностроение», 1968.
3. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости. Изд-во «Наука», 1967.
4. Барбашин Е. А., Функции Ляпунова. Изд-во «Наука», 1970.
5. Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Изд-во «Наука», 1971.
6. Беллман Р., Введение в теорию матриц. Перев. с англ., изд-во «Наука», 1969.
7. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. Изд-во «Наука», 1966.
8. Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд-во «Наука», 1965.
9. Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. П., Оптимальное управление нагревом металла. Изд-во «Металлургия», 1972.
10. Воеводин В. В., Линейная алгебра. Изд-во «Наука», 1974.
11. Воеводин В. В., Линейные преобразования. Изд-во МГУ, 1971.
12. Габасов Р., Кириллова Ф., Качественная теория оптимальных процессов. Изд-во «Наука», 1971.
13. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. Изд-во «Наука», 1966.
14. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике. Изд-во «Наука», 1967.
15. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. Физматгиз, 1964.
16. Глазман М. И., Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ. Изд-во «Наука», 1969.
17. Годунов С. К., Рябенский В. С., Разностные схемы. Изд-во «Наука», 1973.
18. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики. Изд-во «Наука», 1970.
19. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости. Изд-во «Наука», 1967.
20. Заде Л., Дезоер Ч., Теория линейных систем, Перев. с англ. Изд-во «Наука», 1970.
21. Зубов В. И., Лекции по теории управления. Изд-во ЛГУ, 1972.

22. Е р у г и Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1963.
23. К а л м а н Р., Об общей теории систем управления. Труды 1 конгресса ИФАК, т. 2, изд-во АН СССР, 1961, стр. 521—547.
24. К а л м а н Р., Ф а л б П., А р б и б М., Очерки по математической теории систем, перев. с англ. Изд-во «Мир», 1971.
25. К а р т а н А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, перев. с фр. Изд-во «Мир», 1971.
26. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во «Наука», 1968.
27. К р а с о в с к и й Н. Н., Теория управления движением. Изд-во «Наука», 1968.
28. К у д р я в ц е в Л. Д., Математический анализ, т. I. Изд-во «Высшая школа», 1970.
29. К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры. Изд-во «Наука», 1971.
30. Л а п п о - Д а н и л е в с к и й И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1957.
31. Л а - С а л л ь Ж., Л е в ш е п С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, перев. с англ. Изд-во «Мир», 1964.
32. Л е т о в А. М., Динамика полета и управление. Изд-во «Наука», 1969.
33. Л и о н с Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, перев. с франц. Изд-во «Мир», 1972.
34. Л я п у н о в А. М., Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1960.
35. М а л ь ц е в А. И., Основы линейной алгебры. Изд-во «Наука», 1970.
36. М е р к и н Д. Р., Введение в теорию устойчивости движения. Изд-во «Наука», 1971.
37. О к у н е в Л. Я., Высшая алгебра. Изд-во «Просвещение», 1966.
38. П е т р о в с к и й И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во «Наука», 1964.
39. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. Изд-во «Наука», 1961.
40. П о н т р я г и н Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, 1961.
41. Р о й т е н б е р г Я. Н., Автоматическое управление. Изд-во «Наука», 1971.
42. Ф е л ь д б а у м А. А., Б у т к о в с к и й А. Г., Методы теории автоматического управления. Изд-во «Наука», 1971.
43. Ф о р с а й т Дж., М о л е р К., Численное решение системы линейных алгебраических уравнений, перев. с англ. Изд-во «Мир», 1969.
44. Ш и л о в Г. Е., Конечномерные линейные пространства. Изд-во «Наука», 1969.
45. Х о в а н с к и й А. Н., Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. Гостехиздат, 1956.
46. Х а л м о ш П. Р., Конечномерные векторные пространства. Перев. с англ., Физматгиз, 1963.

47. Я кубов ич В. А., Стар жинский В. М., Л инейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Изд-во «Наука». 1972.
48. Bala banian N., Bickart T. A., Electrical Network Theory. New York, 1969.
49. Barker G. P., Normal matrix and the Lyapunov equation. SIAM. J. Appl. Math. 1974, vol. 26, № 1.
50. Barnett S., Some topics in algebraic systems theory: a survey. Int. J. Control, 1974, vol. 19, № 4.
51. Bradshaw A., Porter B., Modal control of a class of distributed — parameter systems. Multi-eigenvalue assignment. Int. J. Control, 1972, vol. 16, № 2, p. 277—285.
52. Brockett R. W., Finite dimensional linear systems. New York, 1970.
53. Bryson A. E., Luenberger D. G., The synthesis of regulator logic using state-variable concepts. Proc. IEEE, 1970, vol. 58, p. 1803—1811.
54. Budy R. S., Global theory of the Riccati equation. J. Comput. Syst. Sci., 1967, vol. I, p. 349—361.
55. Chen C. T., Introduction to linear system theory. New York, 1970.
56. Crank T., Nicholson R., A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. Proc. Camb. Phil. Soc., 1947, vol. 4 p. 50—67.
57. Davison E. J., A high-order Crank—Nicholson techniques for solving differential equation. Computer J., 1967, vol. 10, № 2.
58. Davison E. J., Mann F. T., The numerical solution of $A'Q + QA - - C$, IEEE Trans. Autom. Control. 1968, AC—13, № 4, p. 448—449.
59. Davison E. J., The feedforward control of linear multivariable time — invariant systems. Automatica, vol. 9, p. 561—573, 1973.
60. Davison E. J., The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC—17, № 5, p. 621—629, 1972.
61. Davison E. J., Maki M. C., The numerical solution of the matrix Riccati differential equation. IEEE Trans. Autom. Control, 1973, vol. AC — 18, № 2, p. 71—73.
62. Davison E. J., Smith H. W., Feedforward and feedback design of industrial regulators. Proc. IEEE, 1974, vol. 121, № 5, p. 397.
63. Johnson C. D., Algebraic solution of the servomechanism problem with external disturbances. Trans. ASME. ser. G, 1974, March, p. 25—35.
64. Kalman R. E., Bertram J. E., Control system analysis and design via the second method of Liapunov. Trans. ASME, ser. D, p. 371—393, 1960.
65. Kirk D. E., Optimal control theory. New York, 1970.
66. Kleinman D. L., On Iterative techniques for Riccati Equation computations, IEEE. Trans. Autom. Control, 1968, AC—13, № 2, p. 114—115.

67. Kwakernaak H., Sivan R., Linear optimal control systems. New York, 1972.
68. Luenberger D. G., Observing the state of a linear system. IEEE Trans. Military Electron., 1964, vol. MIL — 8, № 1—2, p. 74—80.
69. Luenberger D. G., Observers for multivariable systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1966, AC—11, № 2, p. 190—197.
70. Luenberger D. G., Canonical forms for linear multivariable systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1967, AC — 12, p. 290—293.
71. Luenberger D. G., An introduction to observers. IEEE Trans. Autom. Control, 1971, AC — 16, p. 596—602.
72. Man F. T., A Theorem on the Lyapunov matrix equation. IEEE Trans. Autom. Control, 1969, AC — 14, № 3, p. 306.
73. Melsa J. L., Schultz D., Linear Control Systems. New York, 1969.
74. Mufti T. H., A review of the poll problem for multivariable systems. Ottawa, May, 1971.
75. Munro N., Computer-aided design procedure for reduced order observers. Estimate of entire state vector. Proc. IEE, 1973, vol. 120, № 2.
76. Munro N., Vardoulakis A., Pole-shifting using output feedback. Int. J. Control, 1973, vol. 18, № 6, p. 1267—1273.
77. Newman A. K., A general theory for compensating constant linear systems. Int. J. Control, 1972, vol. 15, N 4, p. 641—649.
78. Pearson J. B., Ding Ch. J., Compensator design for multivariable linear systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1969, AC — 14, № 2, p. 130—134.
79. Ogata K., State space analysis of control systems. New York, 1966.
80. Porter B., Crossley T. P., Modal Control. London, 1972.
81. Rosenbrock H. H., State-space and multivariable theory. London, 1970.
82. Rnbio I. E., The theory of linear systems. New York, 1971.
83. Shubert H. A., An analytic solution for an algebraic matrix Riccati equation. IEEE AC—19, June 1974.
84. Simon I. D., Mitter S. K., A theory of modal control. Inform. Control, 1968, vol. 13, p. 316—363.
85. Smith H. W., Davison E. J., Design of industrial regulators (integral feedback and feedforward control). Proc. IEE 1972, vol. 119, № 8, p. 1210—1216.
86. Vit K., Iterative solution of the Riccati equation. IEEE Trans. Autom. Control, 1972, AC — 17, № 4, p. 258—259.
87. Wang P. K. C., Modal feedback stabilisation of a linear distributed system. IEEE Trans. Autom. Control, 1972, AC — 17, p. 552—553.
88. Wonham W. M., On pole assignment in multi-input controllable linear systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1967, AC — 12, p. 660—665.
89. Wonham W. M., Tracking and regulation in linear multivariable systems. SIAM J. Control, 1973, vol. II, № 13, p. 424—437.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адьюнкт 35
Аксиома Архимеда 18
— непрерывности 18
— упорядоченности 17
Алгоритм Гаусса 42

Базис 65
— ортонормированный 89
Беспорядок 32

Вектор 82
— выходных переменных 161
— собственный оператора 82
Вектор-столбец 19
Вектор-строка 19
— фазовых координат 161
Беличина выходная 181
Воздействие управляющее 161
Вронского определитель 104
Вход 161
Выход 161

Гамильтониан 403
Гаусса алгоритм 42
Грама матрица 96
— определитель 96
Грамян наблюдемости 266
— системы функции 215
— управляемости 215
Гурвица матрица 179
— многочлен 178
— определитель 180

Детерминант 31, 32
Дефект оператора 77
Диаграмма коммутативная 114
Дифференциатор асимптотический 278

Дополнение алгебраическое 35
— ортогональное 82
Достижимость 216

Единица кольца 14
Еругина теорема 128

Зависимость линейная векторов 84
— — строк (столбцов) матрицы 45
Задача идентификации 280

Задача наблюдения 260
— наименьших квадратов 358
— о регуляторе нулевого состояния 369
— регулирования 203
— терминальная 378
— управления оптимального программного 201
— — финитного 224
Закон управления 229
Значение собственное матрицы 58
— — оператора 82

Идентификатор 272
— асимптотический 275
— Люенбергера 285
Изоморфизм 79
Инверсия 32
Интеграл от матрицы 74

Клетка матрицы 27
Кольцо 10
— ассоциативное 10
— коммутативное 10
Комбинация линейная 88
— — тривиальная 45
Координаты вектора 66
Кони — Буняковского неравенство 88
Кони формула 116
Крамера правило 50
— формулы 50
Критерий достижимости 216
— неидентифицируемости 262
— ненаблюдаемости 263
— Сильвестра 99
— управляемости 211
— — стационарной системы 221
Кронекера — Капелли теорема 49
Кали — Гамильтона теорема 58

Ляпунова матрица 128
— преобразование 128
— теорема 187
Ляпунова — Флоке теорема 130

Матрица 9, 18
— Грама 96
— Гурвица 179
— диагональная 20
— единичная 22

Матрица квадратичной формы 98
 — квадратная 19
 — клеточная 27
 — клеточно-диагональная 29
 — Ляпунова 128
 — многочлена сопровождающая 60
 — модальной обратной связи 316
 — неотрицательно определенная 99
 — неположительно определенная 99
 — нулевая 19
 — обратная 26
 — обратная 26, 40, 41
 — оператора 75
 — ортогональная 94
 — отрицательно определенная 99
 — перехода 67
 — переходная 105, 112, 176
 — подобная 55
 — положительно определенная 99
 — полураспадающаяся 37
 — присоединенная 40, 113
 — псевдообратная 231, 383
 — распавшаяся 29
 — расширенная 49
 — Рауса 180
 — симметрическая 26, 91
 — транспонированная 25
 — треугольная 58, 84
 — устойчивая 145, 178
 — фундаментальная 104
 — характеристическая 56
 Матрицы перестановочные 22
 — равные 19
 Минор 47
 — базисный 47
 — дополнительный 32
 Многочлен 24
 — Гурвица 178
 — минимальный 60
 — устойчивый 178
 — характеристический 56
 Мода 299
 Модуль 62
 Морфизм 73

Неравенство Коши — Буняковского 88
 — треугольника 89
 Норма вектора 88
 Нуль кольца 12

Область значений оператора 73
 — определения оператора 73
 Оболочка множества линейная 69
 Образ вектора 78
 Обращение матрицы 28
 Объект линейный 180, 183
 Оператор единичный 74
 — линейный 78, 79
 — невырожденный 81
 — неособенный 81
 — обратный 81
 — самосопряженный 91
 — скалярный 74
 — сопряженный 90
 — тождественный 74
 Операция алгебраическая 9
 Определители Гурвица 180

Определитель 31, 32
 — Вронского 104
 — Грама 96
 — произведения матриц 38
 Орт 89
 Ортогонализация базиса 90
 Остроградского — Лиувилля теорема 112
 Отрезки вложенные 18

Пеано ряд 110
 Переменные состояния 162, 164
 Пересечение подпространств 70
 Перестановка 32
 — нечетная 32
 — основная 32
 — четная 32
 Подпространство 68
 — инвариантное 82
 Поле 16
 Правило композиции для переходной матрицы 114
 — Крамера 50
 Представление каноническое идентификационные 276
 — — системы со многими входами 245
 — — с одним входом 239
 Преобразование линейное 73
 — Ляпунова 128
 — матриц элементарное 48
 — Риккати 398
 Произведение матриц 20
 — операторов 78
 — скалярное 87
 Производная от матрицы 74
 Прообраз вектора 73
 Пространство евклидово 87
 — линейное 82
 — — бесконечномерное 85
 — — вещественное 82
 — — комплексное 88
 — — конечномерное 65
 — нормированное 89
 — событий 182
 — состояний 181
 — фазовое 182
 Псевдорешение линейной системы 363

Разложение детерминанта 36
 Размерность линейного пространства 55
 — линейной системы 162
 Разность векторов 63
 — элементов 13
 Ранг матрицы 47
 — оператора 77
 Рауса матрица 180
 Регулирование 203
 Регулятор модальный 316
 Решение системы 161
 — общее 51
 — тривиальное 51
 Ряд Пеано 110

Связь обратная модальная 316
 Сильвестра критерий 99

- Система вложенных отрезков 18
 — достижимая 216
 — идентифицируемая 261
 — линейная 160, 163
 — линейных уравнений неоднородная 51
 — — — несовместная 49
 — — — однородная 51
 — — — совместная 49
 — модально управляемая 316
 — — — полностью 316
 — наблюдаемая 261
 — периодическая 218
 — приводимая 128, 182
 — решений фундаментальная 53
 — — — нормальная 53
 — следящая 342
 — — — оптимальная 385
 — стационарная 161
 — управляемая 207
 След матрицы 57
 — — квадратной 112
 Событие 162
 — достижимое 216
 — неидентифицируемое 281
 — наблюдаемое 261
 — управляемое относительно точки 207
 Соответствие изоморфное 79
 Состояние системы 161, 182, 164
 Спектр оператора 82
 Степень устойчивости 178
 — элемента 12
 Столбец 19
 — базисный 47
 Строка 19
 — базисная 47
 Сумма матриц 20
 — — — прямая 29
 — подпространств 89
 — — — прямая 71
 Сходимость последовательности матриц равномерная 107
 — — — функций 106
 — — — равномерная 107
 — ряда функций 107
 — — — абсолютная 107
 — — — равномерная 107
 Теорема Еругина 128
 — Кронекера — Канелли 49
 — Кэли — Гамильтона 58
 — Ляпунова 187
 — Ляпунова — Флоке 130
 — Остроградского — Лиувилля 112
 Точки сопряженные 404
 — фокальные 404
 Траектория движения системы 161
 Транспозиция 32
 Транспонирование 25
 Умножение матрицы на число 23
 Управление 161
 — модальное 299
 — по замкнутому контуру 359
 — — — разомкнутому контуру 359
 — программное оптимальное 201
 — разомкнутое 359
 — терминальное 378
 — финитное 224
 Управляемость 207
 — модальная 316
 Уравнение выхода 161
 — наблюдения 161
 — самосопряженное 119
 — сопряженное 95, 118, 140, 141
 Условие ортогональности 133
 Устойчивость 174
 — асимптотическая 175
 — — — равномерная 184
 — по Ляпунову 174
 — экспоненциальная 185
 Фаза системы 162
 Фильтр Калмана 305
 Форма квадратичная 98
 Формула вариации постоянных 118
 — — — матричная 139
 — Коши 116
 Формулы Крамера 50
 Функция Ляпунова квадратичная 189, 191
 — отрицательно определенная 191
 — передаточная 166
 — периодическая 127
 — положительно определенная 191
 Число 18, 62
 — измерений линейного пространства 65
 — собственное матрицы 58
 — — оператора 82
 — характеристическое матрицы 58
 Экспонента матричная 120, 149
 Элемент 9
 — нулевой 12
 — противоположный 13
 Элементы ортогональные 89
 Ядро оператора 77